LINEARE SYSTEME
UND IHRE AUTOMORPHISMENGRUPPEN

Habilitationsschrift

der Mathematischen Fakultät der
Bayerischen Julius-Maximilians-Universität Würzburg
zur Erlangung der Lehrbefähigung für das Fach

Mathematik

vorgelegt von
Günter Heimbeck
aus Oberasbach

Würzburg 1980

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41543521_0099

LINEARE SYSTEME
UND IHRE AUTOMORPHISMENGRUPPEN

Habilitationsschrift

der Mathematischen Fakultät der
Bayerischen Julius-Maximilians-Universität Würzburg
zur Erlangung der Lehrbefähigung für das Fach

Mathematik

vorgelegt von
Günter Heimbeck
aus Oberasbach

Würzburg 1980

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

INHALTSVERZEICHNIS

Einleitung I

§1. Lineare Systeme 1

§2. Zwei Darstellungssätze 26

§3. Der Verbandssatz und der Ringsatz 37

§4. Standuntergruppen der Automorphismengruppe eines linearen Systems 43

§5. Der Gruppensatz 57

Literaturverzeichnis 72

EINLEITUNG

Bei linearen Systemen - man spricht auch von "schwach-linear-topologischen Räumen" - handelt es sich um eine spezielle Klasse topologischer Vektorräume. Mackey hat sie im Rahmen seiner Untersuchungen über normierte Vektorräume eingeführt (vgl. [M_1], [M_2]). In neuerer Zeit sind lineare Systeme im Zusammenhang mit quadratischen Formen auf Vektorräumen unendlicher Dimension in Erscheinung getreten.

Zu jedem linearen System gehören drei algebraische Strukturen, nämlich der Verband der abgeschlossenen Unterräume, der Ring der Endomorphismen und die Gruppe der Automorphismen. Mackey hat in [M_1] untersucht, inwieweit ein lineares System durch seinen Verband, seinen Ring, oder seine Gruppe festgelegt ist. In der vorliegenden Arbeit wird das eben genannte Problem in voller Allgemeinheit erörtert. Während in [M_1] ausschließlich reelle lineare Systeme behandelt werden, sind hier als Koordinatenkörper beliebige Schiefkörper zugelassen.

§1 gibt eine Zusammenstellung einiger Tatsachen über lineare Systeme, die in der gewünschten Form oder in der erforderlichen Allgemeinheit in der Literatur nicht verfügbar sind. Darüber hinaus wird eine Beschreibung aller linearen Systeme mit vorgelegtem Vektorraum gegeben und die Anzahl der Isomorphieklassen ermittelt. Es folgen Betrachtungen zur Vollständigkeit linearer Systeme. Die Konstruktion eines linearen Systems unendlicher Dimension, das zu keinem seiner echten Unterräume isomorph ist, beschließt diesen Abschnitt. In §2 werden für zwei bekannte Sätze, die an späterer Stelle benötigt werden, neue Beweise gegeben. Der erste der beiden Sätze betrifft die Darstellbarkeit von Vektorraumendomorphismen durch Projektionen. Dabei zeigt es sich, daß ein Endomorphismus in der Regel aus vier Projektionen zusammengesetzt werden kann. Der zweite Satz besagt, daß die lineare Gruppe eines Vektorraums unendlicher Dimension durch eine einzige Konjugiertenklasse von Involutionen erzeugbar ist. In §3 werden die Isomorphismen und Antiisomorphismen zwischen Verbänden und Ringen linearer Systeme ermittelt. Die beiden folgenden Paragraphen behandeln das entsprechende Problem für die Gruppen. Als methodisches Hilfsmittel werden hier Standuntergruppen von Unterräumen eingesetzt.

§4 beschäftigt sich im wesentlichen mit der Frage, wie man ein lineares System im Untergruppenverband seiner Automorphismengruppe sichtbar machen kann. In §5 folgt dann eine Kennzeichnung der Standuntergruppen von Punkten und der von offenen Hyperebenen. Die Betrachtungen münden ein in den Gruppensatz, der Auskunft gibt über Isomorphismen zwischen Automorphismengruppen linearer Systeme.

Herrn Professor Dr. R. Wagner danke ich für zahlreiche Anregungen und wertvolle Ratschläge.

§1. LINEARE SYSTEME

In diesem Abschnitt geben wir eine kurze Einführung in die Theorie der linearen Systeme. Diese an sich bekannten Dinge müssen behandelt werden, weil die vorhandenen Darstellungen (vgl. z. B. $[B_2]$, $[D]$, $[J]$, $[K]$, $[M_2]$) für unsere Zwecke nicht ausreichen. Im Ansatz folge ich dabei der Betrachtungsweise von Mackey in $[M_2]$. Während in den oben genannten Darstellungen algebraische Schlußweisen dominieren, setze ich vornehmlich topologische Überlegungen ein.

Hinsichtlich der Bezeichnungen ist zu bemerken, daß wir unter einem Vektorraum E stets einen Linksvektorraum beliebiger Dimension verstehen wollen; als Koordinatenkörper K sind beliebige Schiefkörper zugelassen. $\mathfrak{P}(E)$ bezeichnet den aus E abgeleiteten projektiven Raum, d. h. den Unterraumverband von E.

Nach diesen Vorbemerkungen zur Sache!

Definition. Ein lineares System ist ein separierter topologischer K-Vektorraum E, in dem die offenen Unterräume endlicher Kodimension eine Umgebungsbasis von $0 \in E$ bilden.

Bei der nun folgenden Diskussion denken wir uns bis auf weiteres ein lineares System E vorgelegt. An den Anfang stellen wir einige Bemerkungen, die zur Klärung der topologischen Verhältnisse in E und K beitragen.

(1) $\mathfrak{F} := \{U \in \mathfrak{P}(E) \mid U \text{ offen}\}$ ist ein Filter des Verbandes $\mathfrak{P}(E)$ aus Unterräumen endlicher Kodimension mit $\bigcap_{U \in \mathfrak{F}} U = 0$.

Beweis. $\mathfrak{F}$ erlaubt offenbar die Bildung endlicher Durchschnitte. Ein Unterraum V, der einen offenen Unterraum U umfaßt, ist wegen $V = \bigcup_{x \in V} (x + U)$ offen. Also ist $\mathfrak{F}$ ein Filter. Ein offener Unterraum ist von endlicher Kodimension, weil er als Umgebung von $0 \in E$ einen Unterraum endlicher Kodimension umfaßt. Da E hausdorffsch ist, gilt $\bigcap_{U \in \mathfrak{F}} U = 0$.

Weil ein offener Unterraum auch abgeschlossen ist, sind die Mitglieder von $\mathfrak{F}$ offen-abgeschlossen. Wir haben in Gestalt von $\{x + U \mid x \in E,\ U \in \mathfrak{F}\}$ eine Topologiebasis aus offen-abgeschlossenen Mengen vor uns, die Topologie von E ist nulldimensional. Demnach sind erstens die Quasikomponenten von E Einermengen;

insbesondere ist E total unzusammenhängend. Zweitens erkennt man ohne Rückgriff auf die allgemeine Theorie, daß die Topologie von E vollständig regulär ist.

Inspizieren wir jetzt die Topologie des Koordinatenkörpers!

(2) Im Falle $E \neq 0$ ist K diskret.

Beweis. Wegen $E \neq 0$ gibt es einen offenen Unterraum $U \in \mathfrak{F} - \{E\}$. Mit beliebig fixiertem $x \in E - U$ liefert $h(\lambda) := \lambda x$ eine stetige Abbildung $h : K \to E$. Weil $h^{-}(x + U) = \{1\}$ offen ist, trägt K die diskrete Topologie.

Die Voraussetzung "$E \neq 0$" in (2) ist unentbehrlich. Der Nullraum über einem beliebigen topologischen Körper ist nämlich gemäß unserer Definition ein lineares System. Die eben genannte Möglichkeit stört uns, weil wir den Koordinatenkörper mit seiner Topologie gelegentlich als eindimensionales lineares System ansehen wollen. Aus diesem Grunde vereinbaren wir, daß K im Falle $E = 0$ mit der diskreten Topologie zu versehen ist.

Wie bei jedem topologischen Vektorraum läßt sich die Topologie von E durch eine uniforme Struktur induzieren. Zu diesem Zwecke setzen wir für $U \in \mathfrak{F}$

$$N_U := \{(x,y) \in E \times E \mid x - y \in U\}$$

und erhalten

(3) $(N_U)_{U \in \mathfrak{F}}$ ist eine Nachbarschaftsbasis für eine uniforme Struktur $\mathfrak{N}$. $\mathfrak{N}$ ist die einzige uniforme Struktur auf E, welche die Topologie von E induziert und bzgl. der die Vektoraddition $(x,y) \in E \times E \to x + y \in E$ gleichmäßig stetig ist.

Beweis. Für $U,V \in \mathfrak{F}$ gilt $N_U \cap N_V = N_{U \cap V}$. Da außerdem jedes N_U eine Äquivalenzrelation auf E darstellt, ist $(N_U)_{U \in \mathfrak{F}}$ eine Nachbarschaftsbasis. - Wegen $N_U(x) = \{y \in E \mid (x,y) \in N_U\} = x + U$ induziert $\mathfrak{N}$ die Topologie von E. Die Vektoraddition ist bzgl. einer uniformen Struktur $\mathfrak{N}'$ genau dann gleichmäßig stetig, wenn es zu jedem $M' \in \mathfrak{N}'$ ein $N' \in \mathfrak{N}'$ mit $N' + N' \subset M'$ gibt, d. h. wenn $\{N' + N' \mid N' \in \mathfrak{N}'\}$ eine Basis von $\mathfrak{N}'$ ist. $\mathfrak{N}$ erfüllt wegen $N_U + N_U = N_U$ diese Bedingung. Ist $\mathfrak{N}'$ eine uniforme Struktur auf E mit den im Satz genannten Eigenschaften, so ist $\mathfrak{B}' := \{N' + \Delta \mid N' \in \mathfrak{N}'\}$ wegen $N' + \Delta \subset N' + N'$ eine Basis von

$\mathfrak{N}'$. Für $B' \in \mathfrak{B}'$ gilt $B' + \Delta = B'$. Daraus folgt zunächst $B'(x) = B'(0) + x$ für jedes $x \in E$ und dann $B' = \bigcup_{x \in E} (\{x\} \times B'(x)) = \bigcup_{x \in E} \{x\} \times (B'(0) + x) = \bigcup_{x \in E} [(\{0\} \times B'(0)) + (x,x)] = \{0\} \times B'(0) + \Delta$. Die eben gewonnene Formel gilt natürlich auch für die Nachbarschaften $N_U \in \mathfrak{N}$. Zum Nachweis der Übereinstimmung von $\mathfrak{N}$ und $\mathfrak{N}'$ wählen wir zu vorgegebenem $U \in \mathfrak{J}$ ein $B' \in \mathfrak{B}'$ mit $B'(0) \subset U$ und erhalten $B' = \{0\} \times B'(0) + \Delta \subset \{0\} \times U + \Delta = N_U$, also $\mathfrak{N} \subset \mathfrak{N}'$. Aus Symmetriegründen folgt die gewünschte Gleichheit.

Unter den uniformen Strukturen, welche die Topologie von E induzieren, macht gemäß (3) genau eine die Vektoraddition gleichmäßig stetig. In diesem Sinne sprechen wir von <u>der</u> uniformen Struktur eines linearen Systems. Zum Hilfssatz (3) selbst bleibt zu bemerken, daß er mutatis mutandis gültig bleibt, wenn man E durch eine abelsche topologische Gruppe ersetzt.

Die nun folgende Serie von Hilfssätzen befaßt sich mit Unterräumen linearer Systeme.

(4) $Z \in \mathfrak{P}(E)$ sei ein Unterraum.
a) Die abgeschlossene Hülle von Z ist der Durchschnitt der offenen Hyperebenen, die Z umfassen.
b) Z offen $\Leftrightarrow$ Z abgeschlossen und von endlicher Kodimension.

Beweis. a) In uniformen Räumen erhält man bekanntlich die abgeschlossene Hülle einer Menge als Durchschnitt ihrer gleichmäßigen Umgebungen. Deshalb ist $\overline{Z} = \bigcap_{N \in \mathfrak{N}} N(Z) = \bigcap_{U \in \mathfrak{J}} N_U(Z) = \bigcap_{U \in \mathfrak{J}} (Z + U) = \bigcap (\mathfrak{J} \cap \mathfrak{P}(E/Z))$. Wegen der Filtereigenschaft von $\mathfrak{J}$ braucht man bei der Durchschnittsbildung nur die Z umfassenden offenen Hyperebenen zu berücksichtigen. b) ($\Rightarrow$) haben wir oben bereits festgestellt. ($\Leftarrow$) Ein abgeschlossener Unterraum endlicher Kodimension ist offen, weil er wegen a) als Durchschnitt von endlich vielen offenen Hyperebenen gewonnen werden kann.

(5) Mit der Spurtopologie ist jeder Unterraum $Z \in \mathfrak{P}(E)$ ein lineares System. Das Filter $\mathfrak{J}_Z$ der in Z offenen Unterräume ist die Spur von $\mathfrak{J}$. Zu jedem $Y \in \mathfrak{J}_Z$ gibt es ein $U \in \mathfrak{J}$ mit $U \cap Z = Y$ und $\dim E/U = \dim Z/Y$.

Beweis. Offenbar ist Z ein separierter topologischer Vektorraum. Die Spur $\mathfrak{F} \cap Z$ von $\mathfrak{F}$ in Z ist eine Umgebungsbasis von $0 \in Z$ aus relativ-offenen Unterräumen endlicher Kodimension. Damit ist Z als lineares System erkannt. Nun überlegen wir, daß $\mathfrak{F} \cap Z$ ein Filter von $\mathfrak{P}(Z)$ ist. Die Bildbarkeit endlicher Durchschnitte steht außer Zweifel. Für einen Unterraum $Y \in \mathfrak{P}(Z)$, der einen Unterraum der Gestalt $U \cap Z \in \mathfrak{F} \cap Z$ umfaßt, folgt mit der Dedekindschen Regel $Y = (U \cap Z) + Y = (U + Y) \cap Z \in \mathfrak{F} \cap Z$. Weil das Filter $\mathfrak{F} \cap Z$ zugleich Basis von $\mathfrak{F}_Z$ ist, erhalten wir $\mathfrak{F}_Z = \mathfrak{F} \cap Z$. Zu vorgegebenem $Y \in \mathfrak{F}_Z$ gibt es ein $W \in \mathfrak{F}$ mit $Y = W \cap Z$. $L \in \mathfrak{P}(E)$ sei ein Komplement von $W + Z$ in E. Für $U := W + L \in \mathfrak{F}$ folgt $U \cap Z = (W + L) \cap Z = W \cap Z = Y$. Unter Berücksichtigung von $U + Z = W + L + Z = E$ ergibt sich $\dim E/U = \dim(U + Z/U) = \dim Z/U \cap Z = \dim Z/Y$.

(6) a) Ein Unterraum ist genau dann diskret, wenn er von endlicher Dimension ist.
b) Endlich-dimensionale Unterräume sind abgeschlossen.

Beweis. a) $Z \in \mathfrak{P}(E)$ ist genau dann diskret, wenn $0 \in \mathfrak{F}_Z$ gilt. Wegen (4b) ist dies gleichwertig mit der Endlichkeit der Dimension von Z. b) Die uniforme Struktur eines endlich-dimensionalen Unterraumes Z ist wegen a) und dem Vorangegangenen diskret. Daraufhin ist Z vollständig und dann wegen der Hausdorff-Eigenschaft von E abgeschlossen.

(7) $Y, Z \in \mathfrak{P}(E)$ seien Unterräume mit $Y \subset Z$. Ist Y abgeschlossen in Z, so gilt $\dim \overline{Z}/\overline{Y} \geq \dim Z/Y$. Im Falle $Y \in \mathfrak{F}_Z$ herrscht Gleichheit.

Beweis. Aus $Z + \overline{Y}/\overline{Y} \cong Z/Z \cap \overline{Y} = Z/Y$ und $\overline{Z} \supset Z + \overline{Y}$ folgt $\dim \overline{Z}/\overline{Y} \geq \dim Z + \overline{Y}/\overline{Y} = \dim Z/Y$. - Für $Y \in \mathfrak{F}_Z$ gilt $Y = Z \cap U$ mit passendem $U \in \mathfrak{F}$. Liegen zwei Nebenklassen $z_i + Y$ $(z_i \in Z)$ in derselben Nebenklasse $x + U$, so folgt $z_1 + U = x + U = z_2 + U$, also $z_1 - z_2 \in Z \cap U = Y$, d. h. die beiden Nebenklassen $z_i + Y$ stimmen überein. Daraufhin ist $\{z + Y \mid z \in Z\}$ ein diskretes Mengensystem. Wir erhalten $\overline{Z} = \overline{\bigcup_{z \in Z} (z + Y)} = \bigcup_{z \in Z} \overline{(z + Y)} = \bigcup_{z \in Z} (z + \overline{Y}) = Z + \overline{Y}$. Mit der eingangs notierten Formel folgt jetzt die Behauptung.

Aus (7) ist zu entnehmen, daß die Summe eines abgeschlossenen

und eines endlich-dimensionalen Unterraums abgeschlossen ist. Darin ist (6b) als Spezialfall enthalten.

Für spätere Zwecke müssen wir einen Grundbestand an stetigen Endomorphismen bereitstellen. Dabei machen wir uns ein sehr einfaches Prinzip zunutze, das zunächst formuliert werden soll. Weil hier die Multiplikation mit Skalaren keine Rolle spielt, fassen wir Gruppenhomomorphismen eines vorgelegten linearen Systems in ein anderes ins Auge. Für solche Abbildungen sind bekanntlich Stetigkeit, Stetigkeit in einem einzigen Punkt und gleichmäßige Stetigkeit gleichwertige Eigenschaften. Insbesondere ist ein Gruppenhomomorphismus schon dann stetig, wenn die Urbilder offener Unterräume offen sind.

(8) E_1, E_2 seien lineare Systeme und $\alpha, \beta : E_1 \to E_2$ Gruppenhomomorphismen. Ist α stetig und stimmen α und β auf einem offenen Unterraum überein, so ist auch β stetig.

Beweis. Das Urbild eines beliebigen Unterraums bzgl. $\gamma := \alpha - \beta$ umfaßt den Kern von γ und dann einen offenen Unterraum. Folglich ist es eine offene Untergruppe. Aus der nunmehr gesicherten Stetigkeit von γ folgt die von $\beta = \alpha - \gamma$.

Wir merken an, daß gemäß (8) Endomorphismen mit offenem Fixpunktraum oder offenem Kern stetig sind.

(9) a) Zu jedem endlich-dimensionalen Unterraum $Z \in \mathfrak{P}(E)$ gibt es eine stetige Projektion $\pi : E \to E$ auf Z.
b) Jede Projektion auf einen offenen Unterraum ist stetig.

Beweis. a) Nach (5) besitzt Z ein offenes Komplement U. Die Projektion auf Z längs U ist stetig. b) ist klar.

(10) Jede lineare Abbildung $\alpha_o : Z \to E$ mit endlich-dimensionalem Originalraum $Z \in \mathfrak{P}(E)$ kann zu einem stetigen, offenen Endomorphismus $\alpha : E \to E$ mit $\operatorname{Kern}\alpha = \operatorname{Kern}\alpha_o$ und $\dim E/\alpha(E) = \operatorname{def}\alpha_o$ fortgesetzt werden.

Beweis. Wir fixieren zunächst ein offenes Komplement U von $Z + \alpha_o(Z)$ und dann Komplemente X_1, X_2 von $Z + U$ bzw. $\alpha_o(Z) + U$. Wegen $\dim X_1 \leq \dim X_2$ gibt es eine Fortsetzung α von α_o, die X_1 injektiv in X_2 abbildet und U vektorweise fest läßt. Wegen

des offenen Fixpunktraumes ist α stetig. Für jedes $W \in \mathfrak{F}$ ist $U \cap W \subset \alpha(W)$ offen; damit ist die Offenheit von α gewährleistet. Man erkennt ohne Mühe, daß $\operatorname{Kern}\alpha = \operatorname{Kern}\alpha_o$ sowie $\dim E/\alpha(E) = \dim X_2 - \dim X_1 = \dim Z - \dim \alpha_o(Z) = \operatorname{def}\alpha_o$ gilt.

Aus (10) folgt insbesondere, daß eine lineare Injektion $\alpha_o : Z \to E$ mit endlich-dimensionalem $Z \in \mathfrak{P}(E)$ zu einem topologischen Automorphismus $\alpha : E \to E$ fortgesetzt werden kann.

(11) E_1, E_2 seien lineare Systeme und $Z \in \mathfrak{P}(E_1)$ ein Unterraum. Dann kann jede stetige lineare Abbildung $\alpha_o : Z \to E_2$ endlichen Ranges zu einer stetigen linearen Abbildung $\alpha : E_1 \to E_2$ mit $\alpha(E_1) = \alpha_o(Z)$ fortgesetzt werden.

Beweis. Da wegen des endlichen Ranges von α_o der Nullraum $O \subset \alpha_o(Z)$ gemäß (6a) relativ offen ist, gilt dasselbe für Kern $\alpha_o \subset Z$. Nach (5) gibt es einen offenen Unterraum $U \subset E_1$ mit $U \cap Z = \operatorname{Kern}\alpha_o$ und $\dim E/U = \dim Z/\operatorname{Kern}\alpha_o$. Die lineare Fortsetzung $\alpha : E_1 \to E_2$ von α_o mit U als Kern ist stetig und hat natürlich die geforderte Eigenschaft $\alpha(E_1) = \alpha_o(Z)$.

Wir wollen nicht unerwähnt lassen, daß (11) ein Analogon zum Satze von Hahn-Banach für lineare Systeme enthält. Dazu braucht man nur zu bedenken, daß jeder Körper als lineares System angesehen werden kann. Hinsichtlich seiner Bedeutung bleibt (11) natürlich weit hinter dem klassischen Satz von Hahn-Banach zurück.

Jedem linearen System E stellen wir den Raum der stetigen Linearformen an die Seite. Auf die engen Beziehungen, die zwischen diesen beiden Räumen bestehen, kommen wir später zu sprechen. Vorerst geht es nur um den Zusammenhang mit $\mathfrak{F}$. Wir bezeichnen den Rechtsvektorraum aller Linearformen von E mit E^*. Eine Teilmenge $S \subset E^*$ heißt <u>total</u>, wenn es zu jedem $x \in E - O$ ein $f \in S$ mit $f(x) \neq 0$ gibt.

(12) $F := \{f \in E^* \mid \operatorname{Kern} f \in \mathfrak{F}\}$ ist der Raum der stetigen Linearformen von E. F ist ein totaler Unterraum von E^*.

Beweis. Eine stetige Linearform $f \in E^*$ hat wegen der Diskretheit von K einen offenen Kern. Für die Umkehrung betrachte man

K als lineares System und ziehe (8) heran. Weil die stetigen Linearformen einen Vektorraum bilden, ist F ein Unterraum von E^*. Bei vorgelegtem $x \in E - 0$ ist die Linearform $f_o : [x] \to K$ mit $f_o(x) = 1$ stetig. Nach (11) gibt es eine stetige Fortsetzung $f \in F$ von f_o.

Gelegentlich kann man Nutzen daraus ziehen, daß sich die Stetigkeit einer linearen Abbildung $\alpha : E_1 \to E_2$ in einfacher Weise mit der zu α dualen Abbildung $\alpha^* : E_2^* \to E_1^*$ erfassen läßt.

(13) E_1, E_2 seien lineare Systeme und F_1, F_2 die zugehörigen Räume der stetigen Linearformen. Dann ist die lineare Abbildung $\alpha : E_1 \to E_2$ genau dann stetig, wenn $\alpha^*(F_2) \subset F_1$ gilt.

Beweis. Im Falle der Stetigkeit ist für jedes $f \in F_2$ die Linearform $\alpha^*(f) = f \circ \alpha$ als Zusammensetzung stetiger Abbildungen stetig. Umgekehrt folgt aus $\alpha^*(F_2) \subset F_1$ wegen $\operatorname{Kern} \alpha^*(f) = \operatorname{Kern} f \circ \alpha = \alpha^-(\operatorname{Kern} f)$ und (12), daß die α-Urbilder offener Hyperebenen offen sind. Dies genügt, weil die offenen Hyperebenen von E_2 eine Umgebungssubbasis von $0 \in E_2$ bilden.

Unser nächstes Ziel ist eine doppelte Beschreibung aller linearen Systeme mit vorgelegtem Vektorraum E, und zwar entweder durch die Filter $\mathfrak{F}$ der offenen Unterräume oder durch die Unterräume F aller stetigen Linearformen. Die in (12) erkannte Kopplung zwischen $\mathfrak{F}$ und F erweist sich dabei als Ausschnitt eines Verbandsisomorphismus. Vorerst stellen wir einige dazu erforderliche Formeln zusammen. Für einen Unterraum $W \in \mathfrak{P}(E^*)$ sei

$$W' := \bigcap_{f \in W} \operatorname{Kern} f .$$

(14) a) $W_1 \subset W_2 \Rightarrow W_2' \subset W_1'$.

b) Ist $(W_i)_I$ eine Familie von Unterräumen von E^*, so gilt

$$(\sum_I W_i)' = \bigcap_I W_i' , \quad (\bigcap_I W_i)' \supset \sum_I W_i' .$$

c) Für endlich-dimensionales $W \in \mathfrak{P}(E^*)$ gilt $\dim E/W' = \dim W$. Ferner ist jede Hyperebene von E, die W' umfaßt, Kern einer passenden Linearform aus W.

Beweis. a) ist klar. b) Aus a) folgt die zweite Formel und $(\sum_I W_i)' \subset \bigcap_I W_i'$. Zur Begründung der noch fehlenden Inklusion

fixieren wir ein $x \in \bigcap_I W_i'$. Jede Linearform $f \in \sum_I W_i$ besitzt eine Darstellung $f = \sum_{I_o} f_i$ mit passenden $f_i \in W_i$ und endlichem $I_o \subset I$. Nun folgt $f(x) = \sum_{I_o} f_i(x) = 0$. Also ist $x \in (\sum_I W_i)'$. c) Mit einer Basis $\{f_1,\dots,f_n\}$ von W folgt $W' = (\sum_{i=1}^n [f_i])' = \bigcap_{i=1}^n [f_i]' = \bigcap_{i=1}^n \operatorname{Kern} f_i$. Wegen der Unabhängigkeit der f_i ist $\dim E/W' = n = \dim W$. Eine Linearform, deren Kern W' umfaßt, hängt von $\{f_1,\dots,f_n\}$ ab, gehört also zu W.

Mit $\mathfrak{F}(E)$ wollen wir das System der Filter von $\mathfrak{P}(E)$ bezeichnen, die aus Unterräumen endlicher Kodimension bestehen. Weil $\mathfrak{F}(F)$ die Bildung beliebiger Durchschnitte erlaubt, haben wir einen vollständigen Verband vor uns.

(15) $\Phi(\mathfrak{F}) := \{f \in E^* \mid \operatorname{Kern} f \in \mathfrak{F}\}$ vermittelt einen Verbandsisomorphismus $\Phi : \mathfrak{F}(E) \to \mathfrak{P}(E^*)$. Für $F \in \mathfrak{P}(E^*)$ ist $\Phi^{-1}(F) = \{W' \mid W \in \mathfrak{P}(F) \text{ endlich-dim.}\}$. Außerdem gilt

$$\Phi(\mathfrak{F})' = \bigcap_{U\in\mathfrak{F}} U;\ \bigcap_{U\in\mathfrak{F}} U = 0 \Leftrightarrow \Phi(\mathfrak{F}) \text{ total.}$$

Beweis. Wegen $\operatorname{Kern}(f+g) \supset \operatorname{Kern} f \cap \operatorname{Kern} g$ und $\operatorname{Kern}(f\lambda) \supset \operatorname{Kern} f$ ist $\Phi(\mathfrak{F})$ ein Unterraum von E^*. Von $[\,\mathfrak{F}_1 \subset \mathfrak{F}_2 \Rightarrow \Phi(\mathfrak{F}_1) \subset \Phi(\mathfrak{F}_2)\,]$ ist allenfalls die Richtung ($\Leftarrow$) fraglich. Hierfür genügt die Bemerkung, daß jedes Filter aus $\mathfrak{F}(E)$ von seinen Hyperebenen erzeugt wird. Zur Begründung der Surjektivität von Φ zeigen wir, daß $\mathfrak{F} := \{W' \mid W \in \mathfrak{P}(F) \text{ endlich-dim.}\}$ bei vorgelegtem $F \in \mathfrak{P}(E^*)$ zu $\mathfrak{F}(F)$ gehört. Gemäß (14c) besteht $\mathfrak{F}$ aus Unterräumen endlicher Kodimension. Wegen der ersten Formel von (14b) kann man in $\mathfrak{F}$ endliche Durchschnitte bilden. Dies zeigt in Verbindung mit der Zusatzaussage von (14c), daß $\mathfrak{F}$ mit W' auch das von W' getragene Unterraumbündel enthält. Nun ist $\mathfrak{F} \in \mathfrak{F}(F)$ gesichert. Offenbar gilt $\Phi(\mathfrak{F}) = F$. Die letzte Behauptung unseres Hilfssatzes erledigt sich durch die Feststellung, daß auf Grund der Erzeugendeneigenschaft der Hyperebenen $\bigcap_{U\in\mathfrak{F}} U$ übereinstimmt mit dem Durchschnitt der Hyperebenen von $\mathfrak{F}$.

(16) E sei ein Vektorraum über dem diskreten Körper K.
a) Ist $\mathfrak{F}$ ein Filter von $\mathfrak{P}(E)$ aus Unterräumen endlicher Kodimension mit $\bigcap_{U\in\mathfrak{F}} U = 0$, so bildet die Menge der Nebenklassen der Mit-

glieder von $\mathfrak{F}$ eine Basis für eine Topologie. Mit dieser Topologie ist E ein lineares System; das Filter seiner offenen Unterräume ist $\mathfrak{F}$.
b) Ist $F \subset E^*$ ein totaler Unterraum, so ist E mit der Initialtopologie bzgl. F ein lineares System. Der Raum der stetigen Linearformen dieses Systems stimmt mit F überein.

Beweis. a) Wie im Beweis von (3) erweist sich $(N_U)_{U\in\mathfrak{F}}$ als Nachbarschaftsbasis. Folglich ist $\{N_U(x) \mid x \in E,\ U \in \mathfrak{F}\} = \{x+U \mid x \in E,\ U \in \mathfrak{F}\}$ eine Topologiebasis. Wegen $N_U + N_U = N_U$ und $\lambda N_U \subset N_U$ nebst der Diskretheit von K ist E ein topologischer Vektorraum, der angesichts von $\bigcap_{U\in\mathfrak{F}} N_U = \{(x,y) \mid x-y \in \bigcap_{U\in\mathfrak{F}} U = 0\} = \Delta$ separiert ist. Da $\mathfrak{F}$ eine Umgebungsbasis von $0 \in E$ ist, haben wir E als lineares System erkannt. Jeder offene Unterraum gehört zu $\mathfrak{F}$, weil er als Umgebung von $0 \in E$ ein Mitglied von $\mathfrak{F}$ umfaßt. b) Weil K diskret ist, bilden die Nebenklassen $x + \operatorname{Kern} f$ $(x\in E, f\in F)$ ein Erzeugendensystem der Initialtopologie bzgl. F. Nach Übergang zu den endlichen Durchschnitten entsteht $\{x+W' \mid x \in E,\ W \in \mathfrak{P}(F) \text{ endlich-dim.}\} \cup \{\emptyset\}$. Nach (15) ist $\mathfrak{F} := \Phi^{-1}(F)$ ein Filter mit den in a) geforderten Eigenschaften. Weil die Initialtopologie von F übereinstimmt mit der gemäß a) aus $\mathfrak{F}$ konstruierten Topologie, ergänzt sie E zu einem linearen System. Eine stetige Linearform $f : E \to K$ liegt in F, weil ihr Kern dem Filter $\mathfrak{F}$ angehört.

Ehe wir die allgemeinen Überlegungen fortführen, wollen wir bei einigen Beispielen verweilen.

0. Beispiel. Jeder Vektorraum endlicher Dimension kann als lineares System gedeutet werden. Dabei hat man keine Wahl. Wegen (6a) muß E mit der diskreten Topologie ausgestattet werden. Daß wir diese triviale Möglichkeit eigens erwähnen, hat folgenden Grund. An späterer Stelle - etwa bei der Untersuchung der Automorphismengruppen linearer Systeme - legen wir Wert darauf, daß unsere Resultate bekannte Spezialfälle einschließen

1. Beispiel. Jeder normierte Vektorraum E (über R oder C) kann als lineares System angesehen werden. Der Raum F der stetigen Linearformen von E ist nämlich nach dem Satz von Hahn-Banach ein totaler Unterraum von E^*. Gemäß (16b) erhält man das zum

normierten Raum E gehörige lineare System. Seine Topologie ist - von $E = 0$ abgesehen - echt feiner als die schwache Topologie von E. Im unendlich-dimensionalen Fall ist sie mit der Normtopologie nicht vergleichbar. Die Möglichkeit, einen normierten Raum als lineares System zu betrachten, gewinnt an Interesse durch folgenden Sachverhalt (vgl. $[M_1]$, S. 246, Lemma B). Eine lineare Abbildung eines normierten Vektorraums in einen anderen ist genau dann stetig, wenn sie stetig ist bzgl. der zugehörigen linearen Systeme. Der gewichtige Teil dieser Aussage, nämlich der Schluß auf die Stetigkeit bzgl. der Normtopologien, folgt aus dem Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit, letzten Endes also aus dem Satz von Baire.

2. Beispiel. Jede nichtausgeartete Sesquilinearform $\Phi : E \times F \to K$ verwandelt E in ein lineares System. Ist Φ etwa in der ersten Komponente linear, so ist $F := \{\Phi(\ ,y) \mid y \in E\}$ ein Unterraum von E^*, der wegen der Voraussetzung "nichtausgeartet" total ist. Die sich hier abzeichnende Möglichkeit, die Theorie der linearen Systeme bei der Untersuchung reflexiver Sesquilinearformen einzusetzen, ist in einer Reihe von Arbeiten verfolgt worden. Ob auf diesem Wege die Theorie der reflexiven Formen wesentlich vorangebracht werden kann, ist beim gegenwärtigen Stand der Dinge kaum absehbar.

3. Beispiel. Wir geben eine einfache Methode zur Konstruktion linearer Systeme an, mit der sich einige der in der Literatur verstreuten Beispiele gewinnen lassen. B sei eine Basis des Vektorraums E. Für jede Teilmenge $M \subset B$ bezeichne $f_M \in E^*$ die Linearform mit $f_M(b) = \begin{cases} 1, & \text{falls } b \in M \\ 0, & \text{falls } b \in B - M \end{cases}$. Zu vorgelegtem $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{P}(B)$ bilden wir $F_{\mathfrak{S}} := [\{f_M \mid M \in \mathfrak{S}\}]$. Die Totalität von $F_{\mathfrak{S}}$ kann durch einfache Zusatzforderungen an $\mathfrak{S}$ erzwungen werden, beispielsweise: Zu jeder endlichen, nichtleeren Teilmenge $A \subset B$ gibt es ein $M \in \mathfrak{S}$ mit $|A \cap M| = 1$. Wählt man für $\mathfrak{S}$ etwa das System $\mathfrak{S}_1$ der Einermengen, so gewinnt man ein besonders übersichtliches lineares System: E und $F_{\mathfrak{S}_1}$ besitzen zueinander orthogonale Basen. Sehr viel interessantere Beispiele stellen sich ein, wenn man in die Auswahl von $\mathfrak{S}$ einige Mühe investiert.

Mackey vertritt in $[M_2]$ ohne weiteren Kommentar die Meinung, daß die Klassifikation aller linearen Systeme, die sich aus einem vorgelegten Vektorraum unendlicher Dimension herstellen

lassen, ein "hoffnungslos schwieriges" Problem sei. Für diese Ansicht spricht die beträchtliche Anzahl von Typen, die man vorfindet. Wir wollen dies jetzt näher ausführen. $|X|$ bezeichne die Kardinalzahl der Menge X.

(17) Für einen K-Vektorraum E unendlicher Dimension gilt
$|\mathrm{End}(E)| = |\mathrm{GL}(E)| = |\mathrm{PGL}(E)| = |\mathcal{P}(E)| = |E^*| = \dim E^*$.

Beweis. Zur Begründung des letzten Gleichheitszeichens verweisen wir auf [B], S. 19, Proposition b). Eine Basis von E^* liefert $\dim E^*$ verschiedene Hyperebenen von E; wir erhalten $|\mathcal{P}(E)| \geq \dim E^*$. Weil jeder Unterraum von E als einziger Fixpunktraum einer passenden Projektivität realisiert werden kann, gilt $|\mathrm{PGL}(E)| \geq |\mathcal{P}(E)|$. Nun haben wir

$$\underline{2^{|E|}} = 2^{|E| \dim E} \geq \lfloor E \rfloor^{\dim E} = |\mathrm{End}(E)| \geq |\mathrm{GL}(E)| \geq |\mathrm{PGL}(E)|$$
$$\geq |\mathcal{P}(E)| \geq \dim E^* = |E^*| = \lfloor K \rfloor^{\dim E} \geq \underline{2^{\dim E}}.$$

Mit [B], S. 20, Lemma 3 folgt jetzt die Behauptung, denn es gilt $\lfloor E \rfloor = |\underline{K}|$ bzw. $\lfloor E \rfloor = \dim E$, je nachdem, ob $\dim E < |K|$ bzw. $\dim E \geq |K|$ ist.

(18) Die Gesamtheit der linearen Systeme auf dem unendlich-dimensionalen Vektorraum E zerfällt in $\dim E^{**}$ Isomorphieklassen.

Beweis. Zunächst ermitteln wir die Anzahl der totalen Unterräume von E^*. Im 3. Beispiel ("Lineares System mit Biorthogonalbasen") hatten wir gesehen, daß es einen totalen Unterraum $F \subset E^*$ mit $\dim F = \dim E$ gibt. Das von F getragene Unterraumbündel besteht aus lauter totalen Unterräumen; wegen $\dim E^* \geq 2^{\dim E} > \dim E = \dim F$ folgt mit (17) $|\mathcal{P}(E^*/F)| = |\mathcal{P}(E^*)| = \dim E^{**}$. Die Anzahl der totalen Unterräume von E^* beträgt also $\dim E^{**}$. Zwei totale Unterräume führen gemäß (13) genau dann zu isomorphen linearen Systemen, wenn es ein $\alpha \in \mathrm{GL}(E)$ gibt, dessen duale Abbildung die totalen Unterräume ineinander überführt. Jede Isomorphieklasse enthält höchstens $|\mathrm{GL}(E)| = \dim E^*$ lineare Systeme. Wegen $\dim E^{**} = 2^{\dim E^*} > \dim E^*$ gibt es insgesamt $\dim E^{**}$ Isomorphieklassen.

Wie groß ist $\dim E^{**}$? Weil es sich um eine Kardinalzahlpotenz handelt, sieht man sich mit dem üblichen Ärgernis konfrontiert, daß bei Verzicht auf die Große Kontinuumshypothese

in manchen Fällen nur eine Abschätzung für die in Rede stehende Kardinalzahl gegeben werden kann. Jedenfalls gilt stets

$$2^{2^{|E|}} \geq \dim E^{**} \geq 2^{|K|}\, 2^{2^{\dim E}}.$$

Ist $\dim E \geq |K|$, so folgt daraus $\dim E^{**} = 2^{2^{|E|}}$. In diesem Fall gibt es genau soviele Isomorphieklassen linearer Systeme wie Homöomorphieklassen von Topologien auf E.

Wir wollen jetzt einige topologische Invarianten eines linearen Systems E bestimmen. Zunächst sei an die Definition dieser Größen erinnert. Für einen topologischen Raum $(X,\mathfrak{T})$ bezeichne

$w(X) := \min \{|\mathfrak{B}| \mid \mathfrak{B}$ Basis von $\mathfrak{T}\}$,
$w(X,x) := \min \{|\mathfrak{B}(x)| \mid \mathfrak{B}(x)$ Umgebungsbasis von $x \in X\}$,
$d(X) := \min \{|A| \mid \overline{A} = X\}$,
$c(X) := \sup \{|\mathfrak{S}| \mid \mathfrak{S} \subset \mathfrak{T}$ ein System paarweise fremder Mengen $\neq \emptyset\}$.

Diese vier Kardinalzahlen heißen der Reihe nach "Gewicht", "Gewicht im Punkt x", "Dichte", "Zellularität". Die Mächtigkeit von $\mathbb{N}$ bezeichne ich mit ω.

(19) E sei ein lineares System unendlicher Dimension und F der Raum der stetigen Linearformen.
a) $w(E,x) = \dim F$.
b) $|K| + \omega \leq c(E) \leq d(E) \leq w(E) = |F|$.

Beweis. a) Wegen der Homogenität von E ist $w(E,x)$ unabhängig von x. B sei eine Vektorraumbasis von F und $\mathfrak{B}$ eine Umgebungsbasis von $0 \in E$. Mit dem Auswahlaxiom gewinnt man eine Abbildung $\varphi : B \to \mathfrak{B}$ mit $\varphi(f) \subset \operatorname{Kern} f$. Wegen der Endlichkeit der φ-Urbildmengen folgt $|B| \leq |\mathfrak{B}|$. Andererseits hat die von der Subbasis $\{\operatorname{Kern} f \mid f \in B\}$ erzeugte Umgebungsbasis von $0 \in E$ die Mächtigkeit $|B|$. b) Die Nebenklassen einer offenen Hyperebene bilden eine $|K|$-gliedrige Familie paarweise fremder, nichtleerer, offener Mengen. Das zeigt $|K| \leq c(E)$. Weil die Zellularität eines unendlichen Hausdorff-Raumes stets unendlich ist, gilt $|K| + \omega \leq c(E)$. Die Ungleichungskette $c(E) \leq d(E) \leq w(E)$ gilt generell, ebenso $w(E,0) \leq w(E)$. Daraus folgt zunächst $d(E)\, w(E,0) \leq w(E)$. Mit der in metrischen Räumen geläufigen Schlußweise findet man eine Topologiebasis der Mächtigkeit $d(E)\, w(E,0)$. Also gilt $w(E) = d(E)\, w(E,0)$. Weil nach (16b) die Topologie von E die Initialtopologie bzgl. F ist, hat man

für E eine Topologiebasis mit der Mächtigkeit $\leq |K||F| = |F|$. Nun folgt $|F| \geq w(E) = d(E)\, w(E,0) \geq |K|^{\dim F} = |F|$, also $w(E) = |F|$.

Wir wollen zwei Bemerkungen anfügen. Erstens zeigt (19a), daß ein lineares System genau dann metrisierbar ist, wenn F abzählbare Dimension hat. Zweitens sagt die Ungleichungskette in (19b), daß im Falle $\dim F \leq |K|$ Zellularität, Dichte und Gewicht mit der Mächtigkeit von K übereinstimmen. Dagegen sagt (19b) bei $\dim F > |K|$ wenig. Man kann auch hier vollständige Klarheit schaffen. Ich will dies nicht weiter verfolgen.

Lineare Systeme über endlichen Körpern weisen eine markante Besonderheit auf: Sie sind präkompakt. Zur Erinnerung sei bemerkt, daß ein separierter uniformer Raum $(X,\mathfrak{N})$ präkompakt heißt, wenn es zu jeder Nachbarschaft $N \in \mathfrak{N}$ eine endliche Überdeckung von X gibt mit Mengen, die klein sind von der Ordnung N.

(20) Ein lineares System $E \neq 0$ ist genau dann präkompakt, wenn K endlich ist.

Beweis. Die Nebenklassen eines offenen Unterraums $U \in \mathfrak{F} - \{E\}$ sind klein von der Ordnung N_U und bilden eine minimale $|K|^{\dim E/U}$-gliedrige Überdeckung von E.

Unser nächstes Ziel soll es sein, den Raum der stetigen Linearformen F eines linearen Systems E zu topologisieren in einer Weise, welche die Herkunft von F in natürlicher Weise berücksichtigt. Wir beginnen mit der Feststellung, daß die Menge

$$\mathfrak{R}(E) := \{\alpha \in \mathrm{End}(E) \mid \alpha \text{ stetig}\}$$

der stetigen Endomorphismen eines linearen Systems E ein Ring ist. Wir sprechen kurz vom Endomorphismenring von E. Die Abbildung $\alpha \in \mathfrak{R}(E) \to \alpha^* \in \mathrm{End}(E^*)$ ist ein injektiver Ringantihomomorphismus. Nach (13) bildet jedes α^* den Raum F der stetigen Linearformen in sich ab. Somit gehört zu jedem $\alpha \in \mathfrak{R}(E)$ ein Endomorphismus

$$\alpha^o := \alpha^*|_F$$

von F. Der Übergang zu den Einschränkungen ist natürlich ein Ringhomomorphismus, der wegen der Totalität von $F \subset E^*$ injektiv ist. Insgesamt erhalten wir einen Ring $\mathfrak{R}^o := \{\alpha^o \mid \alpha \in \mathfrak{R}(E)\}$

von Endomorphismen von F, der antiisomorph zu $\mathfrak{R}(E)$ ist. Beim Problem der Topologisierung von F lassen wir uns von folgender Fragestellung leiten: Ist $\mathfrak{R}^o$ der Endomorphismenring eines passenden linearen Systems F?

Die Entscheidung der Unitätsfrage ist sehr simpel. Man braucht sich nur zu vergegenwärtigen, daß aus dem Endomorphismenring eines linearen Systems das Filter der offenen Unterräume rekonstruiert werden kann. Es besteht nämlich genau aus den Kernen der stetigen Endomorphismen endlichen Ranges. Die Existenzfrage läßt sich wohl am bequemsten durch Rechnen klären. Jeder Vektor $x \in E$ induziert durch "Einsetzen" in die Linearformen aus F eine Linearform $i(x) \in F^*$ mit $i(x)(f) := f(x)$. Man gewinnt eine Abbildung $i : E \to F^*$, deren Linearität mühelos bestätigt werden kann. Wegen der Totalität von F handelt es sich um eine Injektion. Der Bildraum $i(E) \subset F^*$ ist trivialerweise total. Gemäß (16b) ist F mit der Initialtopologie von $i(E)$ ein lineares System. Zu bestätigen bleibt, daß sein Endomorphismenring mit $\mathfrak{R}^o$ übereinstimmt. Dabei werden wir mehrfach das Stetigkeitskriterium (13) benutzen. Bei fixiertem $\alpha^o \in \mathfrak{R}^o$ und beliebigen $x \in E$, $f \in F$ gilt $\alpha^{o*}(i(x))(f) = (i(x) \circ \alpha^o)(f) = i(x)(f \circ \alpha) = f(\alpha(x)) = i(\alpha(x))(f)$. Daraus folgt $\alpha^{o*}(i(x)) = i(\alpha(x))$ auf E, also $\alpha^{o*}(i(E)) \subset i(E)$ und damit die Stetigkeit von α^o. Umgekehrt kann man bei vorgelegtem stetigen Endomorphismus $\gamma : F \to F$ die Abbildung $\alpha := i^{-1} \circ \gamma^* \circ i \in \mathrm{End}(E)$ bilden. Für $x \in E$, $f \in F$ folgt $\alpha^*(f)(x) = (f \circ \alpha)(x) = (f \circ i^{-1} \circ \gamma^* \circ i)(x) = f(i^{-1}(i(x) \circ \gamma)) = i(x) \circ \gamma(f) = \gamma(f)(x)$, also $\alpha^*(f) = \gamma(f)$ auf F. Folglich ist α stetig und es gilt $\alpha^o = \gamma$.

Im folgenden Hilfssatz stellen wir das Ergebnis der vorangegangenen Überlegung mit allen Einzelheiten zusammen.

(21) E sei ein lineares System mit Endomorphismenring $\mathfrak{R}(E)$ und F der Raum der stetigen Linearformen. Dann gibt es genau ein lineares System auf F, das den zu $\mathfrak{R}(E)$ antiisomorphen Ring $\{\alpha^*|_F \mid \alpha \in \mathfrak{R}(E)\}$ als Endomorphismenring besitzt. Die Topologie von F ist die Initialtopologie von $i(E) \subset F^*$; dabei bezeichnet $i : E \to F^*$ die durch $i(x)(f) := f(x)$ definierte lineare Injektion.

Das durch (21) charakterisierte lineare System auf F pflegt man als das zu E konjugierte lineare System E^o zu bezeichnen.

Die nun zur Verfügung stehende Konjugiertenbildung hat den Vorzug, reflexiv zu sein.

(22) Für lineare Systeme gilt $E^{oo} \cong E$.

Beweis. Dem linearen System E^{oo} liegt der Vektorraum $i(E)$ zugrunde; folglich haben wir den Vektorraumisomorphismus $i : E \to E^{oo}$ zur Verfügung. $\mathfrak{F}$ bzw. $\mathfrak{F}^{oo}$ bezeichne das Filter von E bzw. E^{oo}. Man sieht, daß $i(\mathfrak{F})$ ein Filter aus Unterräumen endlicher Kodimension mit Durchschnitt 0 ist. Weiterhin bestätigt man, daß $i \circ \mathfrak{R}(E) \circ i^{-1}$ der Endomorphismenring des durch $i(\mathfrak{F})$ festgelegten linearen Systems ist. Andererseits zeigt die erste der beiden Rechnungen, die zur Begründung von (21) erforderlich waren, daß $i \circ \mathfrak{R}(E) \circ i^{-1} = \mathfrak{R}(E^{oo})$ gilt. Weil das Filter eines linearen Systems durch seinen Endomorphismenring eindeutig bestimmt ist, erhalten wir $i(\mathfrak{F}) = \mathfrak{F}^{oo}$. Folglich ist $i : E \to E^{oo}$ ein topologischer Isomorphismus.

Wir müssen jetzt einige einfache Zusammenhänge zwischen einem linearen System E und seinem konjugierten E^o zusammenstellen. Wie schon früher geschehen, ordnen wir jedem Unterraum $W \in \mathfrak{P}(E^o)$ den Unterraum

$$W' := \bigcap_{f \in W} \operatorname{Kern} f \in \mathfrak{P}(E)$$

von E zu. Unter Benutzung der linearen Injektion i gewinnen wir nach demselben Muster zu jedem $Z \in \mathfrak{P}(E)$ einen Unterraum

$$Z' := \bigcap_{x \in Z} \operatorname{Kern} i(x) = \{f \in E^o \mid Z \subset \operatorname{Kern} f\} \in \mathfrak{P}(E^o)$$

von E^o. Auch diese neue Strichbildung gehorcht den in (14) notierten Regeln. Darüber hinaus gilt

$$E' = 0, \quad E^{o\prime} = 0.$$

Gestrichene Unterräume sind als Durchschnitte offener Hyperebenen abgeschlossen. Wegen (4a) hat man für $Z \in \mathfrak{P}(E)$, $W \in \mathfrak{P}(E^o)$

$$Z'' = \overline{Z}, \quad W'' = \overline{W}.$$

Jedem linearen System ordnen wir folgende Unterraumsysteme zu:

$$\mathfrak{L}(E) := \{Z \in \mathfrak{P}(E) \mid Z \text{ abgeschlossen}\},$$

$$\mathfrak{L}_o(E) := \{Z \in \mathfrak{P}(E) \mid \text{es gibt Proj. } \pi \in \mathfrak{R}(E) \text{ mit } \pi(E) = Z\},$$

$$\mathfrak{L}_{oo}(E) := \{Z \in \mathfrak{P}(E) \mid Z \text{ diskret oder offen}\}.$$

Man hat stets $\mathfrak{L}_{oo}(E) \subset \mathfrak{L}_o(E) \subset \mathfrak{L}(E)$. Nach (9) gilt nämlich die erste Inklusion. Zur zweiten ist zu bemerken, daß der Bildraum einer stetigen Projektion als Kern der natürlich ebenfalls stetigen komplementären Projektion abgeschlossen ist. Außerdem

sieht man, daß $\mathfrak{L}(E)$ ein vollständiger Verband ist, weil der Durchschnitt einer beliebigen Familie abgeschlossener Unterräume abgeschlossen ist. Dabei darf man allerdings nicht aus den Augen verlieren, daß $\mathfrak{L}(E)$ i. a. kein Teilverband von $\mathfrak{P}(E)$ ist, denn die Summe von zwei abgeschlossenen Unterräumen ist nicht notwendig abgeschlossen. $\mathfrak{L}_{oo}(E)$ dagegen ist Teilverband sowohl von $\mathfrak{P}(E)$ als auch von $\mathfrak{L}(E)$. Das im Hinblick auf den Endomorphismenring interessante System $\mathfrak{L}_{o}(E)$ hat i. a. keine Verbandsstruktur. Am Rande möchte ich darauf hinweisen, daß hier ein zwar schon mehrfach bearbeitetes, aber anscheinend noch immer ungelöstes Problem liegt: Welche linearen Systeme haben die Eigenschaft $\mathfrak{L}_{o}(E) = \mathfrak{L}(E)$? Zu dieser Klasse gehören z. B. die linearen Systeme von Hilbert-Räumen. Bekannt ist, daß es weitere nichttriviale Beispiele gibt (vgl. [O], Theoreme 4.1 und 4.3), aber mit Sicherheit nicht im Bereiche der Banach-Räume (vgl. [D], S. 157).

(23) E sei ein lineares System.
a) Für $\alpha \in \mathfrak{R}(E)$ gilt

$$\operatorname{Kern}\alpha = \alpha^{o}(E^{o})', \quad \overline{\alpha(E)} = (\operatorname{Kern}\alpha^{o})',$$

$$\operatorname{Kern}\alpha^{o} = \alpha(E)', \quad \overline{\alpha^{o}(E^{o})} = (\operatorname{Kern}\alpha)'.$$

b) Der Antiisomorphismus $\alpha \in \mathfrak{R}(E) \to \alpha^{o} \in \mathfrak{R}(E^{o})$ bildet die Ideale der Endomorphismen endlichen Ranges aufeinander ab. Dabei bleiben die Ränge erhalten.
c) $Z \in \mathfrak{L}(E) \to Z' \in \mathfrak{L}(E^{o})$ ist ein Verbandsantiisomorphismus, der $\mathfrak{L}_{o}(E)$ bzw. $\mathfrak{L}_{oo}(E)$ in $\mathfrak{L}_{o}(E^{o})$ bzw. $\mathfrak{L}_{oo}(E^{o})$ überführt.

Beweis. Wir bemerken vorweg, daß man angesichts des Isomorphismus $i : E \to E^{oo}$ jeweils nur einen Teil der ausgesprochenen Behauptung zu beweisen braucht. Man ersetzt anschließend E durch E^{o}, wendet in der neuen Situation das bereits Gesicherte an; bei b) und c) muß man zusätzlich mit i^{-1} zurückkehren.
a) Es genügt, die beiden Formeln in der ersten Spalte zu beweisen. Gemäß der Vorbemerkung braucht man dann nur noch die erste Formel zu begründen. Unter Benutzung der Totalität von $E^{o} \subset E^{*}$ folgt $x \in \alpha^{o}(E^{o})' \Leftrightarrow 0 = \alpha^{o}(f)(x) = f(\alpha(x))$ für jedes $f \in E^{o} \Leftrightarrow \alpha(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \operatorname{Kern}\alpha$. b) Aus (14c) und der einschlägigen Formel aus a) folgt für einen Endomorphismus $\alpha \in \mathfrak{R}(E)$ endlichen Ranges $\operatorname{rg}\alpha = \dim\alpha(E) = \dim E^{o}/\alpha(E)' =$

$\dim E^o/\mathrm{Kern}\,\alpha^o = \mathrm{rg}\,\alpha^o$. Nach Vorbemerkung genügt dies. c) Nach (14a) gilt $Z_1 \subset Z_2 \Leftrightarrow Z_1' \supset Z_2'$. Wegen $W'' = W$ für jedes $W \in \mathfrak{L}(E^o)$ ist die in Rede stehende Abbildung auch surjektiv, also ein Verbandsantiisomorphismus. Ist $Z \in \mathfrak{L}_o(E)$ und $\pi(E) = Z$ mit einer passenden Projektion $\pi \in \mathfrak{P}(E)$, so folgt mit a) $Z' = \pi(E)' = \mathrm{Kern}\,\pi^o = (\mathrm{id} - \pi^o)(E^o) \in \mathfrak{L}_o(E^o)$. Mit der Vorbemerkung folgt, daß $\mathfrak{L}_o(E)$ auf $\mathfrak{L}_o(E^o)$ abgebildet wird. Zur letzten Behauptung ist zu bemerken, daß Strichbilder diskreter Unterräume abgeschlossen und nach (14c) von endlicher Kodimension, also offen sind. Weil offene Unterräume von endlicher Kodimension sind, haben sie diskrete Strichbilder.

Wir ermitteln jetzt die vollständigen unter den linearen Systemen. Dieses Problem läßt sich durch den Einsatz von Filtern in sehr übersichtlicher Weise behandeln. Naturgemäß spielen Filter mit einer Basis aus affinen Unterräumen eine besondere Rolle. Weil ich die hierfür in der Literatur gebräuchliche Bezeichnung "lineares Filter" vermeiden möchte, notiere ich folgende

Definition. Ein Filter $\mathfrak{F}$ auf einem Vektorraum heißt affin, wenn es eine Basis aus affinen Unterräumen besitzt.

Z. B. ist das Umgebungsfilter eines Punktes $x \in E$ in einem linearen System ein affines Filter. In einem Vektorraum endlicher Dimension sind die affinen Filter genau die Obermengenfilter der nichtleeren affinen Unterräume. Nach diesen Beispielen noch einige allgemeine Bemerkungen! Bilder und Urbilder affiner Filter bzgl. linearer Abbildungen erzeugen affine Filter. Insbesondere gilt für jedes affine Filter $\mathfrak{F}$ und jede Linearform $f \in E^*$

i) Das Erzeugnis von $f(\mathfrak{F})$ ist entweder das Obermengenfilter eines Punktes oder das gröbste Filter $\{K\}$.

Mit dem Zornschen Lemma ist ohne weiteres zu sehen, daß jedes affine Filter zu einem maximalen affinen Filter verfeinert werden kann. Maximale affine Filter wollen wir affine Ultrafilter nennen. (Diese nach den üblichen Gepflogenheiten gebildete Bezeichnung ist natürlich sprachlich nicht korrekt.) Der letzte Hinweis betrifft die Cauchy-Eigenschaft von Filtern auf einem linearen System.

ii) Ein Filter ist genau dann ein Cauchy-Filter, wenn es affine Hyperebenen mit vorgegebener offener Richtung enthält.

(24) E sei ein lineares System.
a) Ein Filter $\mathfrak{F}$ auf E ist genau dann ein Cauchy-Filter, wenn jede Linearform $f \in E^o$ auf $\mathfrak{F}$ konvergiert.
b) Jedes affine Ultrafilter ist ein Cauchy-Filter.
c) Jedes Cauchy-Filter enthält ein affines Cauchy-Filter.
d) Für jedes Cauchy-Filter $\mathfrak{F}$ liefert $\varphi(f) := \lim_{\mathfrak{F}} f$ eine Linearform auf E^o. Diese ist genau dann stetig, wenn $\mathfrak{F}$ konvergiert. Im Konvergenzfall gilt $\varphi = i(\lim \mathfrak{F})$.
e) Zu jeder Linearform $\varphi \in E^{o*}$ gibt es ein Cauchy-Filter $\mathfrak{F}$ mit $\lim_{\mathfrak{F}} f = \varphi(f)$ auf E^o.

Beweis. a) ist in Anbetracht von ii) klar. b) Wegen i) konvergiert jede Linearform $f \in E^*$ auf einem vorgelegten affinen Ultrafilter $\mathfrak{F}$. Würde nämlich $f \in E^*$ auf $\mathfrak{F}$ nicht konvergieren, so wäre das Erzeugnis von $\mathfrak{F}$ und einer Nebenklasse von Kern f ein affines Filter, das $\mathfrak{F}$ echt verfeinerte. Daraufhin ist $\mathfrak{F}$ gemäß a) ein Cauchy-Filter. c) Das Erzeugnis $\mathfrak{F}_o$ der offenen affinen Hyperebenen aus $\mathfrak{F}$ hat wegen ii) die Cauchy-Eigenschaft. d) Die Linearität von φ ist ohne weiteres erkennbar; man könnte sich auch auf allgemeine Regeln der Grenzwertbildung berufen. Konvergiert $\mathfrak{F}$ gegen x, so folgt $\varphi(f) = \lim_{\mathfrak{F}} f = \lim_{\mathfrak{U}(x)} f = f(x) = f(\lim \mathfrak{F})$ für jedes $f \in E^o$, also $\varphi = i(\lim \mathfrak{F}) \in i(E)$. Ist um gekehrt φ stetig, so gilt $\varphi = i(x)$ mit passendem $x \in E$. Für jedes $f \in E^o$ hat man $\lim_{\mathfrak{F}} f = \varphi(f) = f(x) = \lim_{\mathfrak{U}(x)} f$. Daraus folgt $x + \operatorname{Kern} f \in \mathfrak{F}$ für jedes $f \in E^o$, also $\mathfrak{U}(x) \subset \mathfrak{F}$ und damit die Konvergenz von $\mathfrak{F}$. e) Wir überlegen zunächst, daß endliche Durchschnitte von Mitgliedern aus $\mathfrak{S} := \{f^-(\varphi(f)) \mid f \in E^o\}$ nicht leer sind. $f_1, \ldots, f_n \in E^o$ seien vorgegeben; wir dürfen annehmen, daß $f_1, \ldots, f_k$ ein maximales linear unabhängiges Teilsystem ist. $\bigcap_{i=1}^{k} f_i^-(\varphi(f_i))$ ist nicht leer, weil es sich um einen Durchschnitt affiner Hyperebenen mit unabhängigen Richtungen handelt. Wir fixieren einen Vektor x dieses Durchschnittes. Jedes f_l mit $k < l \leq n$ besitzt eine Darstellung $f_l = \sum_{i=1}^{k} f_i \lambda_i$ mit passenden $\lambda_i \in K$. Wir erhalten $f_l(x) = \left(\sum_{i=1}^{k} f_i \lambda_i\right)(x) = \sum_{i=1}^{k} f_i(x) \lambda_i = \sum_{i=1}^{k} \varphi(f_i) \lambda_i = \varphi\left(\sum_{i=1}^{k} f_i \lambda_i\right) =$

$\varphi(f_1)$, also $x \in f_1^-(\varphi(f_1))$. Nach dieser Überlegung können wir das von $\mathfrak{S}$ erzeugte Filter $\mathfrak{F}$ in Betracht ziehen. Offenbar gilt $\lim_{\mathfrak{F}} f = \varphi(f)$ auf E^o; mit a) folgt dann die Cauchy-Eigenschaft von $\mathfrak{F}$.

Aus (24) ergibt sich das folgende handliche Vollständigkeitskriterium für lineare Systeme.

(25) Für ein lineares System E sind folgende Eigenschaften gleichwertig.

α) E ist vollständig.
β) Jedes affine Ultrafilter konvergiert.
γ) Jedes affine Filter hat einen Häufungspunkt.
δ) $i(E) = E^{o*}$.

Beweis. $\alpha) \Rightarrow \beta)$ Gemäß (24b) ist jedes affine Ultrafilter ein Cauchy-Filter und dann nach Annahme konvergent. $\beta) \Rightarrow \gamma)$ ergibt sich aus der Tatsache, daß jedes affine Filter zu einem affinen Ultrafilter verfeinert werden kann. $\gamma) \Rightarrow \delta)$ Nach (24e) gibt es zu vorgegebenem $\varphi \in E^{o*}$ ein Cauchy-Filter $\mathfrak{F}$ mit $\lim_{\mathfrak{F}} f = \varphi(f)$ auf E^o. Wegen (24c) enthält $\mathfrak{F}$ ein affines Cauchy-Filter, das nach Annahme konvergiert. Also konvergiert auch $\mathfrak{F}$, mit (24d) folgt $\varphi = i(\lim \mathfrak{F}) \in i(E)$. $\delta) \Rightarrow \alpha)$ Die von einem vorgelegten Cauchy-Filter $\mathfrak{F}$ induzierte Linearform ist nach Annahme stetig. Gemäß (24d) konvergiert $\mathfrak{F}$.

Der eben bewiesene Satz offenbart eine formale Analogie zwischen den Begriffen "Vollständigkeit" im Bereiche der linearen Systeme und "Kompaktheit" für topologische Räume. Infolgedessen findet man wohlbekannte Sätze über kompakte Räume bei vollständigen linearen Systemen wieder. Vollständigkeit ist invariant gegenüber stetigen linearen Abbildungen. Eine stetige lineare Injektion eines vollständigen linearen Systems in ein beliebiges lineares System vermittelt einen topologischen Isomorphismus zwischen Original- und Bildraum.

Auf Grund von (25) übersehen wir die Gesamtheit der vollständigen linearen Systeme. Es sind dies die vollen Dualräume $E := H^*$ mit der Initialtopologie bzgl. $i(H) \subset H^{**}$. Jetzt können wir auch die kompakten linearen Systeme ausfindig machen. Weil diese mit den vollständigen präkompakten Systemen übereinstimmen,

handelt es sich wegen (20) - von den Nullräumen abgesehen - genau um die vollständigen linearen Systeme über endlichen Körpern.

Zur Vereinfachung der Sprechweise wollen wir folgende Vereinbarung treffen. Wenn wir einen Dualraum H^* ohne weiteren Kommentar als lineares System ansprechen, so unterstellen wir stillschweigend, daß er mit der Initialtopologie bzgl. $i(H)$ ausgerüstet ist.

(26) Das lineare System E^{o*} ist die bis auf Isomorphie eindeutig bestimmte Vervollständigung des linearen Systems E.

Beweis. Im Beweis von (22) hatten wir $i : E \to E^{oo}$ als Isomorphismus erkannt. Die Spurtopologie von E^{oo} als Unterraum des linearen Systems E^{o*} stimmt überein mit der Topologie des linearen Systems E^{oo}. Schränkt man nämlich die stetigen Linearformen von E^{o*} auf E^{oo} ein, so erhält man genau die stetigen Linearformen des linearen Systems E^{oo}. Weil das Einschränken injektiv ist, liegt E^{oo} dicht in E^{o*}. Demnach kann E^{o*} als eine Vervollständigung von E angesehen werden. Zur Begründung der Eindeutigkeitsaussage denken wir uns eine Einbettung $j : E \to E_1$ von E in ein vollständiges lineares System E_1 vorgegeben; dabei möge $j(E)$ dicht in E_1 liegen. Der uniforme Isomorphismus $j \circ i^{-1} : i(E) \to j(E)$ kann wegen der Hausdorff-Eigenschaft von E^{o*} und E_1 zu einem uniformen Isomorphismus $\alpha : E^{o*} \to E_1$ fortgesetzt werden. Weil α auf einem dichten Unterraum linear ist und E_1 die Hausdorff-Eigenschaft hat, ist α selbst linear. Demnach sind die Vervollständigungen E^{o*} und E_1 isomorph.

Wir wollen uns noch überlegen, daß vollständige lineare Systeme Bairesche Räume sind. Das ist zwar nicht sehr überraschend, trifft aber bekanntlich nicht generell für vollständige uniforme Räume zu. Für die Realisierung der Beweisidee zum klassischen Satz von Baire wird sich die folgende Eigenschaft eines linearen Systems als ausreichend erweisen.

(A) Jedes Filter mit einer abzählbaren Basis aus offenen affinen Unterräumen besitzt einen Häufungspunkt.

Wir haben diese Eigenschaft unter Benutzung des Filterbegriffes

formuliert um zu unterstreichen, daß es sich dabei um eine Abschwächung der Vollständigkeitsforderung handelt. (A) ist offenbar gleichbedeutend mit der Forderung, daß jede absteigende Folge offener nichtleerer affiner Unterräume einen nichtleeren Durchschnitt besitzt.

(27) Ein lineares System mit der Eigenschaft (A) ist ein Bairescher Raum.

Beweis. Wir verifizieren, daß der Durchschnitt einer abzählbaren Familie $(Q_k)_{\mathbb{N}}$ von offenen dichten Mengen dicht ist. Eine vorgelegte nichtleere offene Menge $Q \subset E$ enthält einen offenen affinen Unterraum $B_1 \neq \emptyset$. Da Q_1 dicht in E liegt, folgt $B_1 \cap Q_1 \neq \emptyset$. Also gibt es einen nichtleeren offenen affinen Unterraum $B_2 \subset B_1 \cap Q_1$. In dieser Weise kann man fortfahren, d. h. durch eine Anwendung des Rekursionssatzes eine absteigende Folge $(B_k)_{\mathbb{N}}$ nichtleerer offener affiner Unterräume mit $B_{k+1} \subset Q_k$ für jedes $k \in \mathbb{N}$ gewinnen. Mit (A) folgt nun $Q \cap \bigcap_k Q_k \supset \bigcap_k B_k \cap \bigcap_k Q_k = \bigcap_k B_k \neq \emptyset$.

Ich vermute, daß auch umgekehrt jedes Bairesche lineare System die Eigenschaft (A) aufweist. Das Interesse für diese Eigenschaft wird dadurch verstärkt, daß sie - nach Umformulierung gemäß dem folgenden Satz (28) - in einem Hauptresultat der Arbeit [O] auftritt. Mit unseren Bezeichnungen läßt sich Theorem 3.1 ([O], S. 525) so aussprechen: Ist der Verband $\mathfrak{L}(E)$ eines linearen Systems E modular, so besitzt E oder E^o die Eigenschaft (A). Der folgende Satz stellt die angekündigte Neufassung von (A) dar.

(28) Ein lineares System E besitzt genau dann die Eigenschaft (A), wenn jeder Unterraum abzählbarer Dimension von E^o abgeschlossen ist.

Beweis. E sei ein lineares System mit der Eigenschaft (A) und $W \in \mathfrak{P}(E^o)$ ein vorgelegter Unterraum abzählbarer Dimension. Zu beliebig gewähltem $g \in E^o - W$ gibt es nach (24e) ein Cauchy-Filter $\mathfrak{F}$ auf E, dessen Linearform φ auf W verschwindet und g einen von 0 verschiedenen Wert zuweist. Die Kerne der Linearformen einer Basis von W zusammen mit der zu Kern g parallelen Hyperebene aus $\mathfrak{F}$ erzeugen ein affines Filter $\mathfrak{F}_1 \subset \mathfrak{F}$, auf das

man (A) anwenden kann; also hat $\mathfrak{F}_1$ einen Häufungspunkt $x \in E$. Wegen $\mathfrak{F}_1 \subset \mathfrak{U}(x)$ stimmt die Linearform $i(x)$ auf $W + [g]$ mit φ überein. Also folgt $g \notin \overline{W}$, insgesamt $\overline{W} \subset W$, d. h. die Abgeschlossenheit von W. Zum Beweis der Umkehrung sei ein Filter $\mathfrak{F}$ auf E mit einer abzählbaren Basis aus offenen affinen Unterräumen vorgelegt. $W := \{f \in E^{\circ} \mid f \text{ konvergiert auf } \mathfrak{F}\}$ ist offenbar ein Unterraum von E°. Nun überlegen wir, daß jedes System von unabhängigen affinen Hyperebenen aus $\mathfrak{F}$ abzählbar ist. Man bemerkt, daß jedes System unabhängiger affiner Hyperebenen, die einen vorgelegten offenen affinen Unterraum umfassen, endlich ist. In Verbindung mit (A) begründet dies unsere Zwischenbehauptung. Ihr entnehmen wir, daß W von abzählbarer Dimension ist. Weil nach Annahme dann jeder Unterraum von W abgeschlossen ist, induziert $\mathfrak{F}$ auf W eine stetige Linearform, die gemäß (11) Einschränkung einer Linearform $i(x)$ mit passendem $x \in E$ ist. Man bemerkt, daß $\mathfrak{U}(x)$ eine Verfeinerung von $\mathfrak{F}$ ist. Also ist x ein Häufungspunkt von $\mathfrak{F}$.

Zum Abschluß unserer allgemeinen Erwägungen über lineare Systeme wollen wir darauf hinweisen, daß sich einige grundlegende Eigenschaften endlich-dimensionaler Unterräume auf vollständige Unterräume verallgemeinern lassen.

(29) E sei ein lineares System.
a) Die Summe eines vollständigen und eines abgeschlossenen Unterraums ist abgeschlossen.
b) Jeder vollständige Unterraum besitzt ein abgeschlossenes Komplement.
c) Jede Projektion auf einen abgeschlossenen Unterraum mit vollständigem Kern ist stetig.

Beweis. $Y \in \mathfrak{P}(E)$ sei ein vollständiger Unterraum. a) Bei gegebenem $Z \in \mathfrak{L}(E)$ sei x ein Berührpunkt von $Y + Z$. Dann gilt $(x + U) \cap (Y + Z) \neq \emptyset$, also $(x + U + Z) \cap Y \neq \emptyset$ für jedes $U \in \mathfrak{F}$. Wegen der Vollständigkeit von Y hat das Filter mit der Basis $\{(x + U + Z) \cap Y \mid U \in \mathfrak{F}\}$ einen Häufungspunkt. Weil die Basismengen relativ-abgeschlossen sind, folgt $\emptyset \neq \bigcap_{U \in \mathfrak{F}} ((x + U + Z) \cap Y) = (x + \bigcap_{U \in \mathfrak{F}} N_U(Z)) \cap Y = (x + \overline{Z}) \cap Y = (x + Z) \cap Y$, also $x \in Y + Z$. b) Wir zeigen, daß das durch Inklusion geordnete Unterraumsystem $\mathfrak{S} := \{Z \in \mathfrak{L}(E) \mid Y + Z = E\}$ die Kettenbedingung des Zorn-

schen Lemmas erfüllt. Ist $(Z_i)_I$ eine Kette aus $\mathfrak{S}$ und $x \in E - Y$, so gilt $(x + Z_i) \cap Y \neq \phi$ für jedes $i \in I$. Weil Y vollständig ist, erhalten wir $\phi \neq \bigcap_I ((x + Z_i) \cap Y) = (x + \bigcap_I Z_i) \cap Y$, also $x \in Y + \bigcap_I Z_i$. Wegen der Abgeschlossenheit folgt $\bigcap_I Z_i \in \mathfrak{S}$ und damit die Gültigkeit der Kettenbedingung. Nach dem Zornschen Lemma besitzt $\mathfrak{S}$ minimale Elemente. Ein solches ist wegen der Minimalität fremd zu Y, also ein abgeschlossenes Komplement von Y in E. c) π sei eine Projektion mit abgeschlossenem Bildraum Z und vollständigem Kern Y. Für jedes $U \in \mathfrak{F}$ gilt $\pi^-(U) \supset Y + Z \cap U$. Nach a) ist $Y + Z \cap U$ abgeschlossen und dann wegen der Endlichkeit der Kodimension auch offen. Dies zeigt $\pi^-(U) \in \mathfrak{F}$.

Wir lassen diesen Paragraphen ausklingen mit der Konstruktion eines linearen Systems, das bemerkenswerte Eigenschaften aufweist. Anlaß für dieses Unternehmen ist eine Frage, die sowohl für sich genommen als auch im Hinblick auf unsere weiteren Betrachtungen von Interesse ist. Früher hatten wir einen Grundstock von stetigen Endomorphismen angelegt (vgl. (8) - (10)). Dem Leser ist sicherlich nicht entgangen, daß diese immer verfügbaren stetigen Endomorphismen durchweg einen offenen Kern oder einen offenen Fixpunktraum besitzen. Damit stellt sich zwangsläufig die Frage, ob es lineare Systeme gibt, die keine weiteren stetigen Endomorphismen besitzen, natürlich solche von unendlicher Dimension. Unser Beispiel belegt, daß es lineare Systeme dieser Art gibt. Bemerkenswert erscheint mir dabei der Umstand, daß ein solches System ohne sonderliche Anstrengung hergestellt werden kann, und zwar mit einer Methode, die in endlichen Dimensionen wohlbekannt ist. Übrigens trägt unser Beispiel zur Klärung eines anscheinend noch immer ungelösten Problems bei, das Mackey (vgl. [M_2], S. 205, Problem 1) aufgeworfen hat.

Ich möchte ausdrücklich darauf hinweisen, daß unser Beispiel in unmittelbarer Nähe eines Beispiels liegt, das in [G], S. 513 diskutiert wird. Der Leser möge sich davon überzeugen, daß die Betrachtungen in [G] unser Problem nicht klären.

4. Beispiel. Wir müssen zunächst das Ausgangsmaterial für unsere Konstruktion bereitstellen. $\mathfrak{k}$ sei ein beliebiger kommutativer Körper und K eine rein transzendente Erweiterung von $\mathfrak{k}$

mit überabzählbarer Transzendenzbasis Γ. Wir fixieren eine mit Γ gleichmächtige Menge I und eine Bijektion $\gamma : I \times I \to \Gamma$. Neben $\gamma(i,j)$ benutzen wir die bequemere Schreibweise γ_{ij}. E sei ein K-Vektorraum der Dimension $|I|$ mit der Basis $(e_i)_I$; $(\varkappa_i)_I$ sei die Familie der zu $(e_i)_I$ dualen Linearformen. Mit den durch $f_i(e_j) = \gamma_{ij}$ festgelegten Linearformen $f_i \in E^*$ bilden wir $F := [\{f_i | \ i \in I\}]$. Die nun folgende Kette von Überlegungen zeigt, daß E mit der Initialtopologie bzgl. F ein lineares System ist, das die oben angesprochenen Eigenschaften besitzt. Ehe wir mit den Einzelausführungen beginnen, wollen wir zwei mehrfach wiederkehrende Schlußweisen herausstellen.

i) Zu einer endlichen bzw. abzählbaren Teilmenge $X \subset K$ gibt es eine endliche bzw. abzählbare Teilmenge $J \subset I$ mit $X \subset \mathfrak{k}(\gamma(J \times J))$.

ii) $\Gamma_1 \subset \Gamma$ sei eine Teilmenge und $(\lambda_{ij})_{I \times I}$, $(\mu_{ij})_{I \times I}$ Familien mit endlichen Trägern und Gliedern aus $\mathfrak{k}(\Gamma_1)$. Dann kann aus dem Bestehen der Gleichung $\Sigma \lambda_{ij} \gamma_{ij} \quad \Sigma \mu_{ij} \gamma_{ij}$ geschlossen werden, daß $\lambda_{ij} = \mu_{ij}$ oder $\gamma_{ij} \in \Gamma_1$ für alle $(i,j) \in I \times I$ gilt.

Zur Rechtfertigung von ii) braucht man lediglich zu bemerken, daß $\Gamma - \Gamma_1$ algebraisch unabhängig ist über $\mathfrak{k}(\Gamma_1)$. i) versteht sich von selbst.

a) $F \subset E^*$ ist ein totaler Unterraum.

Beweis. Zu beliebig fixiertem $x \in E - 0$ gibt es nach i) eine endliche Teilmenge $J \subset I$ mit $\{\varkappa_i(x) | \ i \in I\} \subset \mathfrak{k}(\gamma(J \times J))$. Weil die Koordinaten $\varkappa_i(x)$ nicht durchweg verschwinden, folgt mit ii) $f_k(x) = \sum_i \varkappa_i(x) \gamma_{ki} \neq 0$ für jedes $k \in I - J$.

Nach demselben Muster erhält man

b) $(f_i)_I$ ist linear unabhängig.

Führen wir in E die Initialtopologie bzgl. F ein, so verwandelt sich E wegen a) in ein lineares System.

c) Jeder abgeschlossene Unterraum von E bzw. E^0 ist von abzählbarer Dimension oder offen.

Beweis. Wir dürfen uns damit begnügen, die Behauptung für E^o zu begründen. Weil die abgeschlossenen Unterräume genau die gestrichenen sind, haben wir zu zeigen, daß für jedes $Z \in \mathfrak{P}(E)$ der Unterraum Z' offen oder von abzählbarer Dimension ist. Wir brauchen nur unendlich-dimensionale Z zu betrachten, und dann nur solche mit $\dim Z = \omega$. $(z_\nu)_{\mathbb{N}}$ sei eine Basis für Z. Gemäß ii) gibt es eine abzählbare Teilmenge $J \subset I$ mit $\{\varkappa_i(z_\nu) \mid i \in I, \nu \in \mathbb{N}\} \subset \mathfrak{k}(\gamma(J \times J))$. Es sei $I_1 := I - J$, $F_1 := [\{f_i \mid i \in I_1\}]$. Wir zeigen jetzt, daß ein vorgelegtes $f \in F_1 - 0$ nicht alle z_ν annulliert. Mit passenden $\lambda_i \in K$ gilt $f = \sum_{I_1} \lambda_i f_i$. Wegen i) gibt es eine endliche Teilmenge $\Gamma_o \subset \Gamma$ mit $\{\lambda_i \mid i \in I_1\} \subset \mathfrak{k}(\Gamma_o)$. $L := \{j \in I \mid$ es gibt $i \in I$ mit $\gamma_{ij} \in \Gamma_o\}$ ist natürlich endlich. Weil $(z_\nu)_{\mathbb{N}}$ eine unendliche Familie linear unabhängiger Vektoren ist, gibt es ein $\nu \in \mathbb{N}$ und ein $k \notin L$ mit $\varkappa_k(z_\nu) \neq 0$. Die Koeffizienten $\lambda_i \varkappa_j(z_\nu)$ in der Summe $f(z_\nu) = \sum_{I_1 \times I} \lambda_i \varkappa_j(z_\nu) \gamma_{ij}$ gehören durchweg zu $\mathfrak{k}(\gamma(J \times J) \cup \Gamma_o)$. Für passendes $i \in I_1$ ist $\lambda_i \varkappa_k(z_\nu) \neq 0$. Weil außerdem $\gamma_{ik} \notin \gamma(J \times J) \cup \Gamma_o$ gilt, folgt $f(z_\nu) \neq 0$. Aus der jetzt begründeten Zwischenbehauptung folgt $Z' \cap F_1 = 0$. Weil F_1 von abzählbarer Kodimension ist, erhalten wir $\dim Z' \leq \omega$.

d) Jedes $\alpha \in \mathfrak{R}(E)$ hat endlichen Rang oder endlichen Defekt.

Beweis. Nehmen wir $\operatorname{rg}\alpha \geq \dot{\omega}$ an! Nach (23b) ist dann auch $\operatorname{rg}\alpha^o \geq \omega$. Weil dann die abgeschlossenen Kerne von α, α^o nicht offen sind, folgt mit c) $\operatorname{def}\alpha$, $\operatorname{def}\alpha^o \leq \omega$. Wäre $\operatorname{def}\alpha = \omega$, so erhielte man wegen $\alpha^o(E^o) \subset \overline{\alpha^o(F^o)} = (\operatorname{Kern}\alpha)'$ (vgl. (23a)!) und c) zunächst $\operatorname{rg}\alpha^o \leq \omega$. Dies würde zu $\dim F = \operatorname{rg}\alpha^o + \operatorname{def}\alpha^o = \omega$ führen; angesichts von b) ist dies eine Ungereimtheit.

e) $\mathfrak{R}(E) = \{\lambda \operatorname{id} + \delta \mid \lambda \in K, \delta \in \mathfrak{R}(E)$ von endlichem Rang$\}$.

Beweis. Zu einem vorgelegten Endomorphismus $\alpha \in \mathfrak{R}(E)$ unendlichen Ranges gibt es eine abzählbar unendliche Teilmenge $I_1 \subset I$ derart, daß $(\alpha(e_j))_{I_1}$ linear unabhängig ist. Gemäß i) findet man eine abzählbare Teilmenge $J \subset I$ mit $\{\varkappa_i(\alpha(e_j)) \mid i \in I, j \in I_1\} \subset \mathfrak{k}(\gamma(J \times J))$. Wir wählen ein beliebiges $k \in I - J$. Nach (13) ist $f_k \circ \alpha \in F$, also von der Form $f_k \circ \alpha = \sum_I \lambda_1 f_1$. Mit

passender endlicher Teilmenge $\Gamma_o \subset \Gamma$ gilt $\{\lambda_1 | \ 1 \in I\} \subset \mathfrak{k}(\Gamma_o)$. $L := \{j \in I |$ es gibt $i \in I$ mit $\gamma_{ij} \in \Gamma_o\}$ ist endlich. Weil $(\alpha(e_j))$ linear unabhängig ist, enthält $I_1' := \{j \in I_1 |$ es gibt $i \in I - L$ mit $\varkappa_i(\alpha(e_j)) \neq 0\}$ fast alle Elemente von I_1. Für $j \in I_1'$ folgt $\sum_i \varkappa_i(\alpha(e_j))\ \gamma_{ki} = f_k \circ \alpha(e_j) = \sum_l \lambda_l f_l(e_j) = \sum_l \lambda_l \gamma_{lj}$. Die Koeffizienten der γ_{ij} in beiden Summen gehören zu $\mathfrak{k}(\gamma(J \times J) \cup \Gamma_o)$. Wegen $j \in I_1'$ gibt es ein $i \notin L$ mit $\varkappa_i(\alpha(e_j)) \neq 0$. Da $\gamma_{ki} \notin \gamma(J \times J) \cup \Gamma_o$ ist, folgt $i = j$, $\varkappa_j(\alpha(e_j)) = \lambda_k$. Außerdem sieht man $\{i \in I - \{j\} | \ \varkappa_i(\alpha(e_j)) \neq 0\} \subset L$. Mit $\lambda := \lambda_k$ gilt demnach $\alpha(e_j) - \lambda e_j \in [\{e_i | \ i \in L\}]$ für jedes $j \in I_1'$. Dem entnehmen wir, daß der stetige Endomorphismus $\alpha - \lambda\,\mathrm{id}$ unendlichen Defekt hat. Weil dann gemäß d) $\alpha - \lambda\,\mathrm{id}$ von endlichem Rang ist, folgt die Gültigkeit unserer Behauptung.

Nun kommen wir auf das Problem 1 aus $[M_2]$, S. 205 zu sprechen. Dort wird die Frage gestellt, ob es ein lineares System unendlicher Dimension gibt, das zu keiner seiner offenen Hyperebenen isomorph ist. Das eben konstruierte System hat diese Eigenschaft. Dazu zeigen wir, daß jeder injektive Endomorphismus $\alpha \in \mathfrak{R}(E)$ auch surjektiv ist. $\alpha = \lambda\,\mathrm{id} + \delta$ sei eine Darstellung von α gemäß e). Weil $U := \mathrm{Kern}\,\delta$ α-invariant ist, induziert α einen Endomorphismus im endlich-dimensionalen Faktorraum E/U. Dieser ist injektiv und dann auch surjektiv. Daraufhin trifft $\alpha(E)$ jede Nebenklasse von U. In Verbindung mit $\alpha(E) \supset U$ folgt jetzt die behauptete Surjektivität. Die nunmehr gesicherte Zwischenbehauptung zeigt, daß E zu keinem seiner echten Unterräume isomorph ist. Leider ist damit das oben genannte Problem nicht gelöst, weil nämlich in $[M_2]$ ausschließlich r e e l l e lineare Systeme betrachtet werden.

§2. ZWEI DARSTELLUNGSSÄTZE

In diesem Abschnitt behandeln wir zwei Probleme, die an späterer Stelle eine Rolle spielen werden. Das erste betrifft die Darstellbarkeit von Endomorphismen durch Projektionen, das zweite die von Automorphismen durch Involutionen. Beide Probleme sind bereits geklärt (vgl. [W], S. 373 ff. bzw. [R]). Ich möchte es aus folgenden Gründen nicht bei Zitaten belassen. Bei der Behandlung des ersten Problems erhalten wir mit geringerem Auf-

wand ein gegenüber [W] verschärftes Resultat. Unsere Überlegungen zeigen nämlich, wieviele Projektionen zur Darstellung eines Endomorphismus in etwa erforderlich sind. Aus unserer Lösung des zweiten Problems ergeben sich beinahe von selbst einige weitere markante Eigenschaften der linearen Gruppe GL(E) eines unendlich-dimensionalen Vektorraums. Im übrigen bestehen zwischen unseren Überlegungen und den Betrachtungen in den oben genannten Arbeiten kaum Berührungspunkte.

Wir denken uns jetzt einen beliebigen Vektorraum E vorgelegt und prüfen die Frage, ob die Projektionen den Endomorphismenring End(E) erzeugen. Vektorräume E mit $\dim E = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$ dürfen wir beiseite legen, weil in diesen Fällen die Antwort auf der Hand liegt. Als erstes zeigen wir eine Klasse von Endomorphismen vor, die als Produkt von zwei Projektionen dargestellt werden können. Bei der Gewinnung dieses Resultates bedienen wir uns zweier geläufiger Schlußweisen, die wir explizit angeben wollen.

i) Für Unterräume $U,V,W \in \mathfrak{P}(E)$ mit $(U+V) \cap W = 0$ gilt $(U+W) \cap V = U \cap V$.

ii) Sind $U,V \in \mathfrak{P}(E)$ fremde Unterräume und ist $(u_j)_J$ bzw. $(v_j)_J$ eine Familie linear unabhängiger Vektoren aus U bzw. V, so ist der Unterraum $[\{u_j + v_j \mid j \in J\}]$ fremd zu U und V.

(30) E sei ein Vektorraum mit $\dim E \geq 2$. Jeder Endomorphismus $\alpha \in \mathrm{End}(E)$ mit

$$\dim (\alpha(E) \,/\, \alpha(E) \cap \mathrm{Kern}\,\alpha) \leq \dim (\mathrm{Kern}\,\alpha \,/\, \alpha(E) \cap \mathrm{Kern}\,\alpha)$$

besitzt eine Darstellung $\alpha = \pi_2 \circ \pi_1$ mit Projektionen π_1, π_2; diese können so gewählt werden, daß $\mathrm{rg}\,\pi_1 = \mathrm{rg}\,\pi_2 = \mathrm{rg}\,\alpha$ und $\mathrm{Kern}\,\pi_1 = \mathrm{Kern}\,\alpha$ gilt.

Beweis. Zunächst überlegen wir, daß es auf Grund der Annahme über α ein Kernkomplement $U \in \mathfrak{P}(E)$ gibt mit $U \cap \alpha(E) = 0$. Wir setzen $B := \alpha(E)$, $C := \mathrm{Kern}\,\alpha$ und fixieren Komplemente B_o, C_o, L mit $B = B_o \oplus (B \cap C)$, $C = C_o \oplus (B \cap C)$, $E = (B + C) \oplus L$. $(b_j)_J$ sei eine Basis von B_o. Die Annahme über α liefert $\dim C_o = \dim C / B \cap C \geq \dim B / B \cap C = \dim B_o$. Also gibt es eine Familie $(c_j)_J$ linear unabhängiger Vektoren aus C_o. Wir bilden den Unterraum $D := [\{b_j + c_j \mid j \in J\}]$ und zeigen, daß $U := D + L$ das Gewünschte leistet. Wegen $U + C \supset D + C \supset B_o$ enthält $U + C$ den Unter-

raum B und stimmt daraufhin mit E überein. Außerdem gilt $(D + C) \cap L \subset (B + C) \cap L = 0$. Mit i), ii) folgt $U \cap C = (D + L) \cap C = D \cap C = 0$. Damit ist U als Kernkomplement erkannt. Wegen $(B + D) \cap L \subset (B + C) \cap L = 0$ folgt mit i), ii) $U \cap B = (D + L) \cap B = D \cap B = 0$. Zur Gewinnung der gewünschten Darstellung von α fixieren wir eine Basis $(u_i)_I$ von U. Gemäß ii) ist $W := [\{\alpha(u_i) - u_i \mid i \in I\}]$ fremd zu B. Also gibt es eine Projektion π_2 auf B längs eines W umfassenden Komplements von B. π_1 bezeichne die Projektion auf U längs Kern α. Für jedes $i \in I$ gilt $\pi_2 \circ \pi_1(u_i) = \pi_2(u_i) = \pi_2(u_i + (\alpha(u_i) - u_i)) = \pi_2(\alpha(u_i)) = \alpha(u_i)$. Weil außerdem $\pi_2 \circ \pi_1$ auf Kern α verschwindet, folgt $\pi_2 \circ \pi_1 = \alpha$. Die beiden Projektionen π_1, π_2 erfüllen offenbar die in unserem Satz genannten Zusatzbedingungen.

Der Leser hat sicherlich längst bemerkt, daß die Bedingung in (30) bei endlich-dimensionalem E gleichwertig mit $\operatorname{rg}\alpha \leq \operatorname{def}\alpha$, im allgemeinen dagegen eine echte Verschärfung der zuletzt genannten Forderung ist. Im Falle $\dim E \geq \omega$ gibt es nämlich surjektive Endomorphismen mit $\operatorname{def}\alpha = \dim E$. Ein solcher Endomorphismus kann natürlich nicht als Produkt von zwei Projektionen dargestellt werden. Also ist die Forderung in (30) verletzt, die Bedingung $\operatorname{rg}\alpha \leq \operatorname{def}\alpha$ dagegen erfüllt. $\operatorname{rg}\alpha < \operatorname{def}\alpha$ aber garantiert ersichtlich die Anwendbarkeit von (30).

Aus (30) können wir nun den angestrebten Darstellungssatz für Endomorphismen herleiten.

(31) Jeder Endomorphismus $\alpha \in \operatorname{End}(E)$ eines Vektorraums E mit $\dim E \geq 2$ kann durch vier Projektionen in der Gestalt

$$\alpha = \pi_1 \circ \pi_1' + \pi_2 \circ \pi_2'$$

dargestellt werden, es sei denn, daß $\dim E$ endlich und ungerade und α ein Automorphismus ist. In diesem Falle ist eine Darstellung durch sechs Projektionen

$$\alpha = \pi_1 \circ \pi_1' + \pi_2 \circ \pi_2' + \pi_3 \circ \pi_3'$$

erreichbar. Stets können alle Projektionen so gewählt werden, daß ihre Ränge den Rang von α nicht übersteigen.

Beweis. Wir erledigen zunächst den Fall $\dim E < \omega$. Bei gerader Dimension von E fixieren wir ein komplementäres Paar ρ_1, ρ_2 von Projektionen gleichen Ranges. Für jedes $\alpha \in \operatorname{End}(E)$ gilt dann $\operatorname{rg}\alpha \circ \rho_i \leq \operatorname{def}\alpha \circ \rho_i$. Nach (30) gibt es Projektionen

π_i, π_i' mit $\alpha \circ \rho_i = \pi_i \circ \pi_i'$ und $rg\ \pi_i = rg\ \pi_i' = rg\ \alpha \circ \rho_i \leq rg\,\alpha$. Wir erhalten $\alpha = \alpha \circ id = \alpha \circ (\rho_1 + \rho_2) = \alpha \circ \rho_1 + \alpha \circ \rho_2 = \pi_1 \circ \pi_1' + \pi_2 \circ \pi_2'$. Bei ungerader Dimension wählen wir zu vorgelegtem $\alpha \in End(E) - GL(E)$ komplementäre Projektionen ρ_i mit $rg\ \rho_1 + 1 = rg\ \rho_2$ und $\rho_2(E) \cap Kern\,\alpha \neq 0$. Dann gilt $rg(\alpha \circ \rho_i) \leq def(\alpha \circ \rho_i)$. Mit (30) erhält man dann wie eben die gewünschte Darstellung von α. Im Falle $\alpha \in GL(E)$ wählen wir ein dreigliedriges System paarweise orthogonaler Projektionen ρ_i mit $\rho_1 + \rho_2 + \rho_3 = id$ und $rg\ \rho_i \leq \frac{1}{2} \dim E$. Jedes $\alpha \circ \rho_i$ erfüllt die Bedingung von (30), wir gewinnen die im Satz behauptete Darstellung von α durch sechs Projektionen. Nun zum Falle $\dim E \geq \omega$! Wegen (30) können wir uns auf die Betrachtung von Endomorphismen α mit $rg\,\alpha \geq def\,\alpha$ beschränken. Weil dann $rg\,\alpha = \dim E$ gilt, brauchen wir auf die Ränge der Projektionen, die wir zur Darstellung von α benutzen, nicht zu achten. Wir setzen wieder $B := \alpha(E)$, $C := Kern\,\alpha$. 1. Fall: $\dim(B \cap C) = \dim E$. Wir wählen einen kernfremden Unterraum $V \in \mathfrak{P}(E)$ mit $\alpha(V) = B \cap C$. Für diesen gilt $\dim V = \dim E$. $V = V_1 \oplus V_2$ sei eine direkte Zerlegung mit Summanden gleicher Dimension. Wir wählen Unterräume $U_i \supset V_i$ mit $E = U_1 \oplus U_2 \oplus C$. ρ_i bezeichne die Projektion auf U_i längs $U_j \oplus C$. Man sieht jetzt ohne weiteres, daß jedes $\alpha \circ \rho_i$ die Bedingung von (30) erfüllt. Es gilt nämlich $Kern\ \alpha \circ \rho_i = U_j \oplus C$, $\alpha \circ \rho_i(E) = \alpha(U_i)$. Wegen $\alpha(V_j) \cap \alpha(U_i) = 0$ und $\alpha(V_j) \subset Kern\ \alpha \circ \rho_i$ folgt $\dim(Kern\ \alpha \circ \rho_i\ /\ \alpha \circ \rho_i(E) \cap Kern\ \alpha \circ \rho_i) \geq \dim \alpha(V_j) = \dim E$. Also ist jedes $\alpha \circ \rho_i$ als Produkt von zwei Projektionen darstellbar. Wegen $\alpha = \alpha \circ \rho_1 + \alpha \circ \rho_2$ erhalten wir die gewünschte Darstellung von α. 2. Fall: $\dim(B \cap C) < \dim E$. In Anbetracht von (30) dürfen wir $rg\,\alpha > def\,\alpha$ annehmen. Aus Bequemlichkeit nehme ich jetzt eine weitere Fallunterscheidung vor, die sich wohl vermeiden ließe.

i) Für jeden Unterraum $V \in \mathfrak{P}(E)$ mit $V \cap \alpha(V) = 0$ gilt $\dim V < \dim E$. $E = U_1 \oplus U_2$ sei eine beliebige Zerlegung mit Summanden gleicher Dimension, ρ_i bezeichne die Projektion auf U_i längs U_j. Dann gilt $Kern\ \alpha \circ \rho_i \supset U_j$, $\alpha \circ \rho_i(E) = \alpha(U_i)$. Auf Grund der Annahme über α folgt $\dim U_j/\alpha(U_i) \cap U_j = \dim E$. Dem ist zu entnehmen, daß $\alpha \circ \rho_i$ die Bedingung in (30) erfüllt. Die gewünschte Darstellung von α ist damit gesichert.

ii) Es gibt einen Unterraum $V \in \mathfrak{P}(E)$ mit $V \cap \alpha(V) = 0$ und $\dim V = \dim E$. Wegen $\dim E = rg\,\alpha > def\,\alpha$ dürfen wir V als

kernfremd annehmen. $V = V_1 \oplus V_2$ sei eine direkte Zerlegung mit Summanden gleicher Dimension. Weil $V_1 + \alpha(V_1)$, $V_2 + \alpha(V_2)$ fremd sind, gibt es eine Zerlegung $E = U_1 \oplus U_2$ mit $U_i \supset V_i + \alpha(V_i)$. ρ_i bezeichne wieder die Projektion auf U_i längs U_j. Wegen $U_i \cap V_j = 0$ gilt $\dim(\alpha \circ \rho_i(E) \cap \alpha(V_j)) = \dim(\alpha(U_i) \cap \alpha(V_j)) \leq \operatorname{def}\alpha < \dim E$. Daraufhin erfüllt $\alpha \circ \rho_i$ wegen $\alpha(V_j) \subset U_j \subset \operatorname{Kern}\alpha \circ \rho_i$ die Bedingung von (30). Nun ist auch dieser Fall erledigt, und insgesamt unser Satz vollständig begründet.

Wir beschließen unsere Betrachtungen über Projektionen mit einem simplen Sachverhalt, auf den wir später zurückgreifen wollen. Wird an Stelle eines bloßen Vektorraums ein lineares System betrachtet, so tritt zusätzlich der Gesichtspunkt der Stetigkeit hervor. Für die beabsichtigten Anwendungen reicht es aus, die Darstellbarkeit der stetigen Endomorphismen endlichen Ranges durch stetige Projektionen zu sichern. In Verbindung mit dem Darstellungssatz (31) wird dies durch die folgende simple Feststellung geleistet.

(32) E sei ein lineares System unendlicher Dimension. Dann ist jeder stetige Endomorphismus endlichen Ranges als Produkt von zwei stetigen Projektionen endlichen Ranges darstellbar.

Beweis. Ein Endomorphismus $\alpha \in \mathfrak{N}(E)$ endlichen Ranges erfüllt wegen $\operatorname{rg}\alpha < \operatorname{def}\alpha$ die Bedingung in (30). Daher gibt es ein Kernkomplement Z mit $Z \cap \alpha(E) = 0$. (Vgl. den Anfang des Beweises von (30)!) Da der Unterraum $(\alpha - \mathrm{id})(Z) + \alpha(E)$ von endlicher Dimension ist, besitzt er nach (9a) ein offenes Komplement W. Weil $(\alpha - \mathrm{id})(Z)$ und $\alpha(E)$ fremd sind, können wir die Projektion π_2 auf $\alpha(E)$ längs $W + (\alpha - \mathrm{id})(Z)$ bilden. Mit der Projektion π_1 auf Z längs $\operatorname{Kern}\alpha$ gilt $\alpha = \pi_2 \circ \pi_1$. Beide Projektionen sind von endlichem Rang und stetig, weil ihre Kerne offen sind.

Wir wenden uns jetzt dem zweiten Problemkreis dieses Paragraphen zu, nämlich der Darstellbarkeit von Vektorraumautomorphismen durch Involutionen. Bekanntlich gehören zu jeder linearen Involution $\iota \in \mathrm{GL}(E)$ eines beliebigen Vektorraums E die beiden Unterräume

$$P(\iota) := \{x \in E \mid \iota(x) = x\} = \operatorname{Kern}(\iota - \mathrm{id}),$$

$$N(\iota) := \{\iota(x) - x \mid x \in E\} = \mathrm{Bild}(\iota - \mathrm{id}).$$

Auf Grund der Deutung von $P(\iota)$ und $N(\iota)$ als Kern und Bild des Endomorphismus $\iota - \mathrm{id}$ gilt $N(\iota) \cong E/P(\iota)$. Bei $\mathrm{char}\, K \neq 2$ hat man $P(\iota) \oplus N(\iota) = E$, es herrscht die sehr übersichtliche Situation, daß die Involutionen von E bijektiv den Paaren komplementärer Unterräume entsprechen. Im Falle $\mathrm{char}\, K = 2$ gilt $N(\iota) \subset P(\iota)$. Zu vorgegebenen Unterräumen U,V mit $U \subset V$ und $\dim U = \dim E/V$ gibt es eine Involution ι mit $P(\iota) = V$, $N(\iota) = U$. Im allgemeinen ist ι durch $P(\iota)$ und $N(\iota)$ bei weitem nicht festgelegt, wohl aber die Konjugiertenklasse von ι.

In einem Vektorraum endlicher Dimension kann man bekanntlich je zwei Unterräume gleicher Dimension durch eine Involution auswechseln. Die folgenden Überlegungen zeigen, daß dieser Sachverhalt in unendlichen Dimensionen nicht bestehen bleibt. Die $GL(E)$-Bahn eines Unterraums enthält stets zwei Mitglieder, die nicht durch eine Involution ausgewechselt werden können, sobald Dimension und Kodimension des Unterraums beide unendlich sind.

(33) E sei ein beliebiger Vektorraum.

a) Für Unterräume $U,V \in \mathfrak{P}(E)$ sind folgende Aussagen gleichwertig.

i) Es gibt eine Involution, die U und V auswechselt.
ii) $\dim U/U \cap V = \dim V/U \cap V$.
iii) U und V besitzen ein gemeinsames Komplement.
iv) Es gibt eine Involution, die U und V auswechselt und ein vorgegebenes gemeinsames Komplement von U und V vektorweise fest läßt.

b) Je zwei Unterräume gleicher Dimension und gleicher Kodimension können durch ein Produkt von zwei Involutionen ineinander übergeführt werden.

Beweis. a) i) $\Rightarrow$ ii) Eine Involution, die U und V auswechselt, läßt $U \cap V$ im ganzen fest und führt demnach ein Komplement von $U \cap V$ in U in ein solches von $U \cap V$ in V über. ii) $\Rightarrow$ iii) Wir fixieren Komplemente mit $U = U_o \oplus (U \cap V)$, $V = V_o \oplus (U \cap V)$, $E = (U + V) \oplus Z$. Weil nach Annahme $\dim U_o = \dim V_o$ gilt, gibt es gleich lange Basen $(u_i)_I$, $(v_i)_I$ von U_o, V_o. Man verifiziert ohne Mühe, daß $Y := [\{u_i + v_i \mid i \in I\}]$ fremd ist zu U und zu V.

Wir zeigen jetzt, daß $W := Y \oplus Z$ ein Komplement von U ist. Wegen $(U+Y) \cap Z = 0$ folgt $W \cap U = (Y+Z) \cap U = Y \cap U = 0$. Wegen $V_o \subset U+W$ umfaßt $U+W$ auch V. Somit ist $U+W = E$, W ist als Komplement von U erkannt. Aus Symmetriegründen ist dann W auch ein Komplement von V. iii) $\Rightarrow$ iv) Es sei $U \oplus W = V \oplus W = E$. Wir fixieren eine Basis $(u_i)_I$ von U. Zu jedem u_i gibt es genau ein $v_i \in V$ mit $v_i + W = u_i + W$. Im Falle $\operatorname{char} K = 2$ ist die lineare Abbildung ι mit $\iota(u_i) = v_i$ für $i \in I$, $\iota(w) = w$ auf W involutorisch. $\iota(U)$ ist ein in V enthaltenes Komplement von W, also gleich V. Bei $\operatorname{char} K \neq 2$ betrachten wir den Unterraum $N_o := [\{u_i + v_i \mid i \in I\}]$. Wir überlegen zunächst, daß N_o fremd zu W ist. Aus $\Sigma \lambda_i (u_i + v_i) \in W$ folgt wegen $\Sigma \lambda_i (u_i - v_i) \in W$ erst $2 \Sigma \lambda_i u_i \in W$ und dann $\Sigma \lambda_i u_i \in W \cap U = 0$, weil $\operatorname{char} K \neq 2$ ist. Weil die Familie $(u_i)_I$ linear unabhängig ist, erhalten wir $\lambda_i = 0$ für jedes $i \in I$. Die Zwischenbehauptung ist jetzt abgesichert, wir können ein Komplement $N \supset N_o$ für W fixieren. Die Involution ι mit $P(\iota) = W$, $N(\iota) = N$ leistet das Verlangte: $2\iota(u_i) = \iota((u_i + v_i) + (u_i - v_i)) = -(u_i + v_i) + (u_i - v_i) = -2v_i$, also $\iota(u_i) = -v_i$ für jedes $i \in I$. Wie oben folgt $\iota(U) = V$. iv) $\Rightarrow$ i) bedarf keiner Begründung. b) $U,V \in \mathfrak{P}(E)$ seien Unterräume mit $\dim U = \dim V$, $\dim E/U = \dim E/V$. Wir nehmen an, daß U,V nicht durch eine Involution ausgewechselt werden können und dürfen dann wegen a) etwa $\dim U/U \cap V < \dim V/U \cap V$ unterstellen. Wegen dieser Zusatzannahme sind Dimension und Kodimension von V beide unendlich. Der obigen Ungleichung entnehmen wir $\dim V = \dim U \cap V$. Also gibt es einen Unterraum $Y \subset U \cap V$ mit $\dim U \cap V/Y = \omega + \dim V/U \cap V$. Für diesen gilt $\dim U/Y = \dim U \cap V/Y = \dim V/Y$. Wegen $\dim E/U = \dim E/U+V + \dim U+V/U = \dim E/U+V + \dim V/U \cap V \geq \dim E/U+V + \dim U/U \cap V = \dim E/U+V + \dim U+V/V = \dim E/V$ folgt $\dim E/U+V \geq \dim V/U \cap V$. Weil außerdem $\dim E/U+V \geq \omega$ gilt, ist $\dim E/U+V \geq \omega + \dim V/U \cap V = \dim U \cap V/Y$. Wir finden also einen zu $U+V$ fremden Unterraum Z mit $\dim Z = \dim U \cap V/Y$. Für $W := Y \oplus Z$ folgt mit der Dedekindschen Regel $W \cap U = Y = W \cap V$. Wegen $\dim U/U \cap W = \dim U/Y = \dim Z = \dim W/Y = \dim W/U \cap W$ und $\dim V/V \cap W = \dim V/Y = \dim Z = \dim W/Y = \dim W/V \cap W$ gibt es nach a) Involutionen ι_1, ι_2 mit $\iota_1(U) = W$, $\iota_2(W) = V$. Wir erhalten $\iota_2\iota_1(U) = V$.

Wir legen uns jetzt die Frage vor, ob die lineare Gruppe GL(E) von ihren Involutionen erzeugt wird. Ist E ein endlich-dimensionaler Vektorraum mit $\dim E \geq 2$, so enthält das Erzeugnis der Involutionen jedenfalls alle Transvektionen und damit SL(E). Anhand des - auch bei nichtkommutativen Körpern verfügbaren - Determinantenhomomorphismus erkennt man, daß das Erzeugnis der Involutionen entweder SL(E) oder eine Erweiterung einer zyklischen Gruppe der Ordnung 2 durch SL(E) ist. Beschränkt man sich auf kommutative Koordinatenkörper, so kann man die glatte Feststellung treffen, daß die Gruppe GL(E) genau dann das Erzeugnis ihrer Involutionen ist, wenn $|K| \leq 3$ gilt. Zieht man auch nichtkommutative Körper in Betracht, so wird man auf das anscheinend noch ungeklärte Problem geführt, ob es Schiefkörper K gibt mit der Eigenschaft, daß die Faktorgruppe der Multiplikationsgruppe $K^\times$ nach ihrer Kommutatorgruppe $K^{\times\prime}$ höchstens die Ordnung 2 hat. Insgesamt kann man jedenfalls sagen, daß die lineare Gruppe GL(E) eines endlich-dimensionalen Vektorraums nur in Ausnahmefällen das Erzeugnis ihrer Involutionen ist. Ich finde es einigermaßen überraschend, daß sich die Situation in unendlichen Dimensionen vollständig ändert. Wir wollen uns jetzt überlegen, daß die lineare Gruppe eines unendlich-dimensionalen Vektorraums stets durch ihre Involutionen erzeugt wird.

Aus Gründen, die später sichtbar werden, wollen wir zur Erzeugung eine spezielle Sorte von Involutionen benutzen. Geben wir diesen Involutionen zunächst einen Namen!

Definition. Eine Involution $\iota \in GL(E)$ heißt extremal, wenn es eine Basis für E gibt, die durch ι fixpunktfrei permutiert wird.

Der vorstehenden Definition entnimmt man, daß eine Involution ι genau dann extremal ist, wenn es ein Paar komplementärer Unterräume gibt, die durch ι ausgewechselt werden. Außerdem bemerken wir, daß die extremalen Involutionen eine Konjugiertenklasse von GL(E) bilden. Ehe wir fortfahren, wollen wir noch klarlegen, wie sich die Eigenschaft "extremal" durch die Unterräume $P(\iota)$, $N(\iota)$ beschreiben läßt.

(34) Eine Involution $\iota \in GL(E)$ eines Vektorraums $E \neq 0$ ist genau dann extremal, wenn $\dim P(\iota) = \dim N(\iota)$ bei $\operatorname{char} K \neq 2$

bzw. $P(\iota) = N(\iota)$ bei $\operatorname{char} K = 2$ gilt.

Beweis. Wie oben vermerkt, gibt es zu einer extremalen Involution ι einen Unterraum U mit $U \oplus \iota(U) = E$. U ist offenbar ein maximaler zu $P(\iota)$ bzw. $N(\iota)$ fremder Unterraum und damit ein gemeinsames Komplement für $P(\iota)$ und $N(\iota)$. Bei $\operatorname{char} K = 2$ folgt dann wegen $N(\iota) \subset P(\iota)$ die behauptete Gleichheit $P(\iota) = N(\iota)$. Im Falle $\operatorname{char} K \neq 2$ erhalten wir $\dim P(\iota) = \dim E/U = \dim N(\iota)$. Nun zur Umkehrung! Bei $\operatorname{char} K = 2$ wählen wir ein Komplement U für $P(\iota)$. Weil U keinen Fixvektor $\neq 0$ enthält, folgt $u + \iota(u) \notin U$ für jedes $u \in U - 0$, also $\iota(u) \notin U$. Demnach sind U und $\iota(U)$ fremd. Weil $U + \iota(U)$ das Bild $N(\iota) = P(\iota)$ von $\iota - id$ umfaßt, folgt $U + \iota(U) = E$. Nun ist gesichert, daß U und $\iota(U)$ komplementäre Unterräume sind. Bei $\operatorname{char} K \neq 2$ wählen wir Basen $(p_i)_I$, $(n_i)_I$ für $P(\iota), N(\iota)$. Man bestätigt ohne Mühe, daß die beiden Familien $(p_i + n_i)_I$, $(p_i - n_i)_I$ zusammen eine Basis von E bilden. ι permutiert die Vektoren dieser Basis fixpunktfrei.

Wir treten nun den Beweis für unseren zweiten Darstellungssatz an.

(35) Die lineare Gruppe GL(E) eines Vektorraums unendlicher Dimension ist das Erzeugnis ihrer extremalen Involutionen.

Beweis. Unsere Beweisanordnung gliedert sich in natürlicher Weise in drei Phasen, die allerdings von sehr unterschiedlichem Gewicht sind. Die wesentliche Hürde wird in der Anfangsphase genommen. - G bezeichne das Erzeugnis der extremalen Involutionen.

1) G enthält jeden Automorphismus $\alpha \in GL(E)$, der ein komplementäres Paar invarianter Unterräume gleicher Dimension besitzt. Beweis. $E = U \oplus V$ sei eine direkte Zerlegung mit α-invarianten Summanden gleicher Dimension. Weil α in der Form $\alpha = \alpha_1 \alpha_2$ mit Automorphismen $\alpha_1(x) = \begin{cases} \alpha(x) & \text{auf } U \\ x & \text{auf } V \end{cases}$, $\alpha_2(x) = \begin{cases} x & \text{auf } U \\ \alpha(x) & \text{auf } V \end{cases}$ dargestellt werden kann, dürfen wir zusätzlich annehmen, daß α einen der beiden Summanden - etwa V - vektorweise fest läßt. Wir zeigen jetzt, daß α als Produkt von vier extremalen Involutionen dargestellt werden kann. Weil der Unterraum V von unendlicher Dimension ist, kann er in abzählbar unendlich viele Summanden gleicher Dimension zerlegt werden: $V = \bigoplus_{\mathbb{N}} U_k$. Zur

Vereinheitlichung der Bezeichnungsweise setzen wir $U_o := U$. Dann gilt $\dim U_k = \dim E$ für jedes $k \in \mathbb{N}_o$. Wir fixieren eine Indexmenge I der Mächtigkeit $\dim E$. Für jedes $k \in \mathbb{N}_o$ sei $(e_i^{(k)})_I$ eine Basis von U_k. $\gamma_k : U_o \to U_k$ sei der durch $\gamma_k(e_i^{(0)}) = e_i^{(k)}$ festgelegte Isomorphismus. Weil I unendlich ist, gibt es eine fixpunktfreie Involution $\pi : I \to I$. Wir betrachten jetzt die folgenden vier Involutionen:

$$\iota_1(e_i^{(2k)}) = e_i^{(2k+1)} \quad ; \quad \iota_2(e_i^{(2k+1)}) = \gamma_{2k}(\alpha(e_i^{(0)})) \quad ;$$

$$\iota_1'(e_i^{(2k)}) = \begin{cases} e_{\pi(i)}^{(0)} & \text{für } k=0 \\ e_i^{(2k-1)} & \text{für } k \in \mathbb{N} \end{cases} \quad ; \quad \iota_2'(e_i^{(2k)}) = \begin{cases} e_{\pi(i)}^{(0)} & \text{für } k=0 \\ \gamma_{2k-1}(\alpha(e_i^{(0)})) & \text{für } k \in \mathbb{N} \end{cases}.$$

Jede von ihnen ist extremal. Wegen $\iota_2'\iota_1'\iota_2\iota_1(e_i^{(0)}) = \iota_2'\iota_1'\iota_2(e_i^{(1)}) = \iota_2'\iota_1'\gamma_o(\alpha(e_i^{(0)})) = \iota_2'\iota_1'(\alpha(e_i^{(0)})) = \alpha(e_i^{(0)})$, $\iota_2'\iota_1'\iota_2\iota_1(e_i^{(2k)}) = \iota_2'\iota_1'\iota_2(e_i^{(2k+1)}) = \iota_2'\iota_1'(\gamma_{2k}(\alpha(e_i^{(0)}))) = \iota_2'\gamma_{2k-1}\alpha(e_i^{(0)}) = e_i^{(2k)}$ für $k \in \mathbb{N}$ und $\iota_2'\iota_1'\iota_2\iota_1(\gamma_{2k+1}\alpha(e_i^{(0)})) = \iota_2'\iota_1'\iota_2(\gamma_{2k}\alpha(e_i^{(0)})) = \iota_2'\iota_1'(e_i^{(2k+1)}) = \iota_2'(e_i^{(2k+2)}) = \gamma_{2k+1}(\alpha(e_i^{(0)}))$ für $k \in \mathbb{N}_o$ folgt $\alpha = \iota_2'\iota_1'\iota_2\iota_1 \in G$.

2) G enthält alle Involutionen von GL(E).

Beweis. Wir zeigen, daß jede Involution $\iota \in GL(E)$ die Prämisse von 1) erfüllt. Betrachten wir zunächst den Fall $\operatorname{char} K = 2$. Mit Komplementen U,Z mit $E = U \oplus P(\iota)$, $P(\iota) = Z \oplus N(\iota)$ folgt $(U \oplus \iota(U)) \oplus Z = E$. Einer der beiden Unterräume U,Z hat dieselbe Dimension wie E. Im Falle $\dim Z = \dim E$ gewinnen wir aus einer Zerlegung $Z = Z_1 \oplus Z_2$ mit Summanden gleicher Dimension eine des Gesamtraumes $E = (U + \iota(U) + Z_1) \oplus Z_2$ mit ι-invarianten Summanden gleicher Dimension. Bei $\dim U = \dim E$ wird $U = U_1 \oplus U_2$ in Unterräume gleicher Dimension zerlegt. $E = (U_1 + \iota(U_1)) \oplus (U_2 + \iota(U_2) + Z)$ ist dann eine Zerlegung von E der gewünschten Art. Bei $\operatorname{char} K \neq 2$ wird der größere der beiden Unterräume $P(\iota), N(\iota)$ in zwei Summanden gleicher Dimension zerlegt; einer davon wird dem kleineren angefügt.

3) $G = GL(E)$.

Beweis. Bei vorgelegtem $\alpha \in GL(E)$ fixieren wir irgendeine Zerlegung $E = U \oplus V$ mit Summanden gleicher Dimension. Nach (33b) gibt es ein Produkt $\iota_1\iota_2$ von zwei Involutionen mit $\iota_1\iota_2(U) = \alpha(U)$. Gemäß (33a) gibt es eine Involution ι_3, die V und $\iota_2\iota_1\alpha(V)$

auswechselt und das gemeinsame Komplement U fest läßt. Weil $\iota_3\iota_2\iota_1\alpha$ U und V jeweils im ganzen fest läßt, folgt nach 1) $\iota_3\iota_2\iota_1\alpha \in G$. Da nach 2) das Produkt $\iota_1\iota_2\iota_3$ zu G gehört, erhalten wir $\alpha \in G$.

Aus dem eben bewiesenen Satz können wir zwei markante Eigenschaften der linearen Gruppe eines unendlich-dimensionalen Vektorraums ableiten. Dabei kommt uns zustatten, daß wir extremale Involutionen zur Erzeugung benutzt haben. In unendlichen Dimensionen kann einerseits jede extremale Involution als Produkt von zwei extremalen - insbesondere konjugierten - Involutionen dargestellt werden; folglich ist jede extremale Involution ein Kommutator. Andererseits ist jede extremale Involution n-te Potenz für jedes $n \in \mathbb{N}$. Zur Begründung braucht man nur zu bemerken, daß die fixpunktfreien Involutionen einer symmetrischen Gruppe unendlichen Grades die genannten Eigenschaften besitzen. Aus der ersten Feststellung folgt, daß die lineare Gruppe eines Vektorraums unendlicher Dimension perfekt ist, d. h. mit ihrer Kommutatorgruppe übereinstimmt. Der zweiten entnehmen wir, daß GL(E) keine echte Untergruppe von endlichem Index besitzt. Sonst gäbe es nämlich einen echten Normalteiler von endlichem Index, und dieser enthielte alle extremalen Involutionen.

Eine letzte Bemerkung! Anders als bei unserem ersten Darstellungssatz haben wir beim Beweis von (35) nichts unternommen, um einen vorgelegten Automorphismus in sparsamer Weise durch extremale Involutionen darzustellen. Ich habe Versuche in dieser Richtung angestellt, aber nur Resultate erzielen können, von denen anzunehmen ist, daß sie verbesserungsfähig sind. Das, was ich glaube beweisen zu können, will ich hier in Form von Vermutungen aussprechen. Jeder Automorphismus eines Vektorraumes unendlicher Dimension kann als Produkt von höchstens sechs extremalen Involutionen dargestellt werden. Daraufhin ist jedes Element von GL(E) Produkt von höchstens drei Kommutatoren. Bei diesen Überlegungen hat sich ein Gesichtspunkt ergeben, der mir erwähnenswert erscheint. Im Falle überabzählbarer Dimension besitzt jeder Automorphismus $\alpha \in GL(E)$ einen im strengen Sinne invarianten Unterraum U mit $\dim U = \dim E/U$. Bei abzählbar unendlicher Dimension dagegen ist dies unzutreffend.

Betrachten wir im Vektorraum E mit der Basis $(e_j)_{\mathbb{Z}}$ den durch $\alpha(e_i) = e_{i+1}$ für jedes $i \in \mathbb{Z}$ bestimmten Automorphismus α. $U \subset E$ sei ein Unterraum $\neq 0$ mit $\alpha(U) = U$. Einen Vektor $x \in U - 0$ können wir mit passendem $n \in \mathbb{N}$ in der Form $x = \sum_{-n}^{n} \lambda_i e_i$ darstellen. U enthält den Unterraum $W := [\{\alpha^k(x) \mid k \in \mathbb{Z}\}]$. Wegen $W + [e_{-n},\ldots,e_n] = E$ ist U von endlicher Kodimension.

§3. DER VERBANDSSATZ UND DER RINGSATZ

Zu jedem linearen System E gehören zwei algebraische Strukturen, nämlich der Verband $\mathfrak{L}(E)$ der abgeschlossenen Unterräume und der Ring $\mathfrak{R}(E)$ der stetigen Endomorphismen. Jeder Isomorphismus eines linearen Systems in ein anderes induziert Isomorphismen der zugehörigen Verbände und Ringe. In diesem Paragraphen soll gezeigt werden, daß jeder Isomorphismus zwischen Verbänden bzw. Ringen linearer Systeme der Dimension ≥ 3 in der eben beschriebenen Weise hervorgebracht werden kann. Für Antiisomorphismen ergeben sich ähnliche Resultate.

Die folgenden Betrachtungen verallgemeinern und verschärfen die einschlägigen Ergebnisse aus [M_1]. Während wir lineare Systeme über beliebigen Schiefkörpern zulassen, werden dort ausschließlich reelle lineare Systeme betrachtet. Mackey begnügt sich mit der Feststellung, daß ein lineares System E durch seinen Ring $\mathfrak{R}(E)$ bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt ist; wir dagegen ermitteln sämtliche Isomorphismen zwischen Ringen linearer Systeme.

Es bleibt zu bemerken, daß der Ringsatz in voller Allgemeinheit bekannt ist (vgl. [J], S. 266, Theorem 7). Jacobson hat ihn durch kunstvolle algebraische Überlegungen bewiesen, übrigens unter Einbeziehung des zweidimensionalen Falles. Unsere Betrachtungen zum Ringsatz zeigen, daß sich das Mackeysche Verfahren so verfeinern läßt, daß es im Falle $\dim E \geq 3$ dem von Jacobson ebenbürtig ist. Damit steht ein von geometrischen Vorstellungen getragener Zugang zum Ringsatz zur Verfügung.

Den weiteren Betrachtungen sollen stets Vektorräume zugrunde liegen, die mindestens von der Dimension 3 sind. Diese Maßgabe ist erforderlich, weil wir den Fundamentalsatz der projektiven Geometrie einsetzen wollen.

Bei der Gewinnung der beiden Sätze, die wir in diesem Abschnitt anstreben, tritt ein Problem auf, das wir im folgenden Hilfssatz klären.

(36) E_1, E_2 seien Vektorräume und $\mathfrak{L}_i \subset \mathfrak{P}(E_i)$ Unterraumsysteme, die jeweils sämtliche Punkte und sämtliche Geraden enthalten. Dann kann jeder Ordnungsisomorphismus $\varphi_o : \mathfrak{L}_1 \to \mathfrak{L}_2$ in eindeutiger Weise zu einer Kollineation $\varphi : \mathfrak{P}(E_1) \to \mathfrak{P}(E_2)$ fortgesetzt werden.

Beweis. Die Begründung der Eindeutigkeitsaussage ist simpel. Sind nämlich φ', φ'' zwei Fortsetzungen der verlangten Art, so ist $\varphi''^{-1} \circ \varphi'$ eine Kollineation von $\mathfrak{P}(E_1)$, die alle Punkte fest läßt. Also handelt es sich um die identische Abbildung, φ' und φ'' stimmen überein. Zum Beweis der Existenzbehauptung müssen wir eine längere Schlußkette durchlaufen. Wir bemerken zunächst, daß φ_o und φ_o^{-1} völlig gleichberechtigt sind. Demgemäß brauchen wir von zwei gleichartigen Behauptungen über φ_o und φ_o^{-1} jeweils nur eine zu begründen.

1) $U \in \mathfrak{L}_1 - \{0\} \Rightarrow \varphi_o(U) \neq 0$; $W \in \mathfrak{L}_2 - \{0\} \Rightarrow \varphi_o^{-1}(W) \neq 0$.
Beweis. Im Falle $\varphi_o(U) = 0$ wäre U das kleinste Element von $\mathfrak{L}_1$, also 0.

2) φ_o und φ_o^{-1} bilden jeweils Punkte auf Punkte und Geraden auf Geraden ab.
Beweis. Für einen Punkt $P \in \mathfrak{P}(E_1)$ ist nach 1) $\varphi_o(P) \neq 0$. Daher gibt es einen Punkt $Q \subset \varphi_o(P)$. Dies führt zu $0 \neq \varphi_o^{-1}(Q) \subset \varphi_o^{-1}(\varphi_o(P)) = P$ und dann aus Dimensionsgründen auf $\varphi^{-1}(Q) = P$, also $\varphi_o(P) = Q$. Ist $G \in \mathfrak{P}(E_1)$ eine Gerade, so ist $\varphi_o(G) \neq 0$ und kein Punkt. Also gibt es eine Gerade $H \subset \varphi_o(G)$. Daraus folgt $\varphi_o^{-1}(H) \subset \varphi_o^{-1}(\varphi_o(G)) = G$. Weil $\varphi_o^{-1}(H)$ mindestens zweidimensional ist, erhalten wir $\varphi_o^{-1}(H) = G$, d. h. $\varphi_o(G) = H$.

Um die folgenden Definitionen bequem aufschreiben zu können, bezeichnen wir die Menge der Punkte eines Unterraums U mit $\langle U \rangle$. Wir betrachten die durch

$$\varphi(U) := \sum_{P \in \langle U \rangle} \varphi_o(P) \qquad \text{bzw.} \qquad \psi(W) := \sum_{Q \in \langle W \rangle} \varphi_o^{-1}(Q)$$

definierten Abbildungen $\varphi : \mathfrak{P}(E_1) \to \mathfrak{P}(E_2)$ bzw. $\psi : \mathfrak{P}(E_2) \to \mathfrak{P}(E_1)$

3) φ bzw. ψ ist eine isotone Fortsetzung von φ_o bzw. φ_o^{-1}. Für $U \in \mathfrak{P}(E_1)$, $W \in \mathfrak{P}(E_2)$ gilt $\psi\varphi(U) \supset U$, $\varphi\psi(W) \supset W$.

Beweis. Die Isotonie von φ und ψ sowie die Gültigkeit der beiden Formeln ist ohne weiteres erkennbar. Wir wenden uns sogleich der Fortsetzungseigenschaft von φ zu. Für $U \in \mathfrak{L}_1$, $W \in \mathfrak{L}_2$ gilt $\varphi(U) \subset \varphi_o(U)$, $\psi(W) \subset \varphi_o^{-1}(W)$. Daraus schließen wir $U \subset \psi\varphi(U) \subset \psi\varphi_o(U) \subset \varphi_o^{-1}\varphi_o(U) = U$, also $\psi\varphi_o(U) = U$ und dann $\varphi(U) = \varphi\psi\varphi_o(U) \supset \varphi_o(U)$. Das sichert $\varphi(U) = \varphi_o(U)$.

4) Für $U_1, U_2 \in \mathfrak{P}(E_1)$, $W_1, W_2 \in \mathfrak{P}(E_2)$ gilt $\varphi(U_1 + U_2) = \varphi(U_1) + \varphi(U_2)$, $\psi(W_1 + W_2) = \psi(W_1) + \psi(W_2)$.
Beweis. Weil φ isoton ist, gilt $\varphi(U_1 + U_2) \supset \varphi(U_1) + \varphi(U_2)$. Durch einen Punkt $P \subset U_1 + U_2$, der weder in U_1 noch in U_2 liegt, können wir eine Treffgerade G für U_1, U_2 legen. $R_i := U_i \cap G$ $(i = 1,2)$ sind dann zwei verschiedene Punkte von G. Mit 2) folgt $\varphi_o(P) \subset \varphi_o(G) = \varphi_o(R_1 + R_2) = \varphi_o(R_1) + \varphi_o(R_2) \subset \varphi(U_1) + \varphi(U_2)$. Damit ist die noch fehlende Inklusion bewiesen.

5) Für $U \in \mathfrak{P}(E_1)$, $W \in \mathfrak{P}(E_2)$ gilt $\psi\varphi(U) = U$, $\varphi\psi(W) = W$.
Beweis. Wir beweisen die erste Formel zunächst für endlich-dimensionale Unterräume U durch Induktion nach $\dim U$. Definitionsgemäß gilt sie für $U = O$. Ist U ein Unterraum mit $\dim U = n + 1$, so wählen wir eine Zerlegung $U = U_o \oplus P$ mit n-dimensionalem U_o. Wegen 3) und 2) gilt $\psi\varphi(P) = P$. Dies liefert zusammen mit 4) und der Induktionsannahme $\psi\varphi(U) = \psi\varphi(U_o + P) = \psi\varphi(U_o) + \psi\varphi(P) = U_o + P = U$. Den allgemeinen Fall können wir jetzt folgendermaßen erledigen. Zu jedem Punkt $Q \subset \varphi(U)$ gibt es einen endlich-dimensionalen Unterraum $Z \subset U$ mit $Q \subset \varphi(Z)$. Dann ist $\psi(Q) \subset \psi\varphi(Z) = Z \subset U$, was die noch ausstehende Inklusion $\psi\varphi(U) \subset U$ sichert.

Aus 3) und 5) folgt jetzt unmittelbar die Behauptung. Danach ist φ eine isotone Bijektion mit isotoner Umkehrung ψ, also eine Kollineation, die φ_o fortsetzt.

Der Gewinnung des Verbandssatzes steht jetzt nichts mehr im Wege.

(37) Verbandssatz. E_1, E_2 seien lineare Systeme.
a) Zu jedem Isomorphismus $\varphi : \mathfrak{L}(E_1) \to \mathfrak{L}(E_2)$ gibt es eine bis auf Homothetien eindeutig bestimmte topologische semilineare Transformation $\Phi : E_1 \to E_2$ mit $\varphi(U) = \Phi(U)$ für jedes $U \in \mathfrak{L}(E_1)$.
b) Zu jedem Antiisomorphismus $\psi : \mathfrak{L}(E_1) \to \mathfrak{L}(E_2)$ gibt es eine bis auf Homothetien eindeutig bestimmte topologische semiline-

are Transformation $\Phi : E_1^o \to E_2$ mit $\psi(U) = \Phi(U')$ für jedes $U \in \mathfrak{L}(E_1)$.

Beweis. a) Punkte und Geraden sind als Unterräume endlicher Dimension abgeschlossen. Also können wir uns auf (36) berufen. Danach ist φ Ausschnitt einer eindeutig bestimmten Kollineation $\mathfrak{P}(E_1) \to \mathfrak{P}(E_2)$; diese kann nach dem Fundamentalsatz der projektiven Geometrie durch eine semilineare Transformation $\Phi : E_1 \to E_2$ induziert werden. Die in unserer Behauptung enthaltene Eindeutigkeitsaussage ist jetzt schon erledigt. An Hand der in (4b) gegebenen Kennzeichnung der offenen Unterräume erkennt man, daß Φ das Filter der offenen Unterräume von E_1 auf das von E_2 abbildet. Dies zeigt, daß Φ ein Homöomorphismus ist. b) Mit (23c) folgt, daß durch $\varphi(W) := \psi(W')$ ein Isomorphismus $\varphi : \mathfrak{L}(E_1^o) \to \mathfrak{L}(E_2)$ definiert wird. Nach a) gibt es eine topologische semilineare Transformation $\Phi : E_1^o \to E_2$ mit $\varphi(W) = \Phi(W)$ auf $\mathfrak{L}(E_1^o)$. Weil die Strichbildung bijektiv ist, erhalten wir $\psi(U) = \Phi(U')$ für jedes $U \in \mathfrak{L}(E_1)$. Zur Absicherung der Eindeutigkeitsaussage kann man z. B. so argumentieren. Sind $\Phi_1, \Phi_2 : E_1^o \to E_2$ zwei Abbildungen der genannten Art, so folgt $\Phi_1(Q) = \psi(Q') = \Phi_2(Q)$ für jeden Punkt $Q \in \mathfrak{P}(E_1^o)$. Also unterscheiden sich Φ_1 und Φ_2 höchstens um eine Homothetie.

Es bleibt zu bemerken, daß der Verbandssatz ungeändert gültig bleibt, wenn man die Verbände $\mathfrak{L}(E_i)$ ersetzt durch die Systeme $\mathfrak{L}_o(E_i)$ bzw. $\mathfrak{L}_{oo}(E_i)$. Daraus kann man dann die freilich nicht sehr eindrucksvolle Folgerung ziehen, daß die drei geordneten Mengen $\mathfrak{L}(E)$, $\mathfrak{L}_o(E)$, $\mathfrak{L}_{oo}(E)$ eines linearen Systems E kanonisch isomorphe Automorphismengruppen besitzen.

Wir nehmen jetzt den Ringsatz ins Visier. In zwei vorbereitenden Hilfssätzen räumen wir die letzten Hindernisse beiseite.

(38) Ein Ringautomorphismus $\sigma : \mathfrak{R}(E) \to \mathfrak{R}(E)$, der alle Projektionen endlichen Ranges fest läßt, ist die Identität.

Beweis. Als erstes bemerken wir, daß σ alle Endomorphismen endlichen Ranges fest läßt, weil diese nach (31) bzw. (32) aus stetigen Projektionen endlichen Ranges zusammengesetzt werden können. Bei vorgelegtem $\alpha \in \mathfrak{R}(E)$ fixieren wir einen Vektor $x \in E$. Nach (9a) gibt es eine Projektion $\pi \in \mathfrak{R}(E)$ mit

$\pi(E) = [x]$. Weil $\alpha \circ \pi$ von endlichem Rang ist, folgt zunächst $\alpha \circ \pi = \sigma(\alpha \circ \pi) = \sigma(\alpha) \circ \sigma(\pi) = \sigma(\alpha) \circ \pi$ und daraus $\alpha(x) = \alpha \circ \pi(x) = \sigma(\alpha) \circ \pi(x) = \sigma(\alpha)(x)$. Demnach gilt $\sigma(\alpha) = \alpha$.

Die zweite Vorüberlegung ist eine überwiegend formale Angelegenheit. Wegen des uneinheitlichen Sprachgebrauches sei angemerkt, daß wir unter einer Quasiordnung auf einer Menge X eine binäre, reflexive und transitive Relation $\preccurlyeq$ verstehen wollen. Wir erinnern daran, daß man aus einer quasigeordneten Menge X in kanonischer Weise eine geordnete Menge $\overline{X}$ konstruieren kann.

$$x \sim y \quad :\Leftrightarrow \quad x \preccurlyeq y \quad \text{und} \quad y \preccurlyeq x$$

liefert nämlich eine Äquivalenzrelation auf X. Bezeichnet $\overline{x}$ die Faser von $x \in X$, so wird durch

$$\overline{x} \leq \overline{y} \quad :\Leftrightarrow \quad x \preccurlyeq y$$

eine Ordnungsrelation auf der Fasermenge $\overline{X}$ definiert.

(39) Die Menge $\Pi \subset \mathfrak{R}(E)$ der stetigen Projektionen des linearen Systems E wird durch

$$\pi_1 \preccurlyeq \pi_2 \quad :\Leftrightarrow \quad \pi_2 \circ \pi_1 = \pi_1$$

quasigeordnet. $\theta(\overline{\pi}) := \pi(E)$ liefert einen Isomorphismus $\theta : \overline{\Pi} \to \mathfrak{L}_o(E)$.

Beweis. Weil $\pi_2 \circ \pi_1 = \pi_1$ gleichbedeutend mit $\pi_1(E) \subset \pi_2(E)$ ist, erweist sich $\preccurlyeq$ als Quasiordnung auf Π. Die Faser von $\pi \in \Pi$ besteht aus den stetigen Projektionen, die $\pi(E)$ als Bildraum haben. Demnach ist $\theta(\overline{\pi}) := \pi(E)$ eine sinnvolle Zuordnungsvorschrift. θ ist per definitionem surjektiv. Weil außerdem $\overline{\pi}_1 \leq \overline{\pi}_2 \Leftrightarrow \pi_1(E) \subset \pi_2(E) \Leftrightarrow \theta(\overline{\pi}_1) \subset \theta(\overline{\pi}_2)$ gilt, ist $\theta : \overline{\Pi} \to \mathfrak{L}_o(E)$ ein Ordnungsisomorphismus.

Aus (36), (38), (39) und unseren Kenntnissen über lineare Systeme erhalten wir nun den

(40) <u>Ringsatz</u>. E_1, E_2 seien lineare Systeme.
a) Zu jedem Isomorphismus $\sigma : \mathfrak{R}(E_1) \to \mathfrak{R}(E_2)$ gibt es eine bis auf Homothetien eindeutig bestimmte topologische semilineare Transformation $\Phi : E_1 \to E_2$ mit $\sigma(\alpha) = \Phi \circ \alpha \circ \Phi^{-1}$ für jedes $\alpha \in \mathfrak{R}(E_1)$.
b) Zu jedem Antiisomorphismus $\tau : \mathfrak{R}(E_1) \to \mathfrak{R}(E_2)$ gibt es eine bis auf Homothetien eindeutig bestimmte topologische semili-

neare Transformation $\Phi : E_1^o \to E_2$ mit $\tau(\alpha) = \Phi \circ \alpha^o \circ \Phi^{-1}$ für jedes $\alpha \in \mathfrak{R}(E_1)$.

Beweis. a) Π_i bezeichne die Menge der Projektionen von $\mathfrak{R}(E_i)$. Weil Π_i ringtheoretisch beschreibbar ist als Menge der Idempotenten von $\mathfrak{R}(E_i)$, vermittelt σ eine Bijektion von Π_1 auf Π_2. Wegen der Multiplikationstreue von σ gilt $\pi_1 \leq \pi_2 \Leftrightarrow \sigma(\pi_1) \leq \sigma(\pi_2)$. Daraufhin induziert σ vermöge $\overline{\sigma}(\overline{\pi}) := \overline{\sigma(\pi)}$ einen Ordnungsisomorphismus $\overline{\sigma} : \overline{\Pi}_1 \to \overline{\Pi}_2$. Mit den Isomorphismen $\theta_i : \overline{\Pi}_i \to \mathfrak{L}_o(E_i)$ aus (39) erhalten wir den Isomorphismus $\theta_2 \circ \overline{\sigma} \circ \theta_1^{-1} : \mathfrak{L}_o(E_1) \to \mathfrak{L}_o(E_2)$. Gemäß (9a) enthalten die Systeme $\mathfrak{L}_o(E_i)$ jeweils alle Punkte und alle Geraden. Die Voraussetzungen von (36) sind erfüllt, $\theta_2 \circ \overline{\sigma} \circ \theta_1^{-1}$ läßt sich zu einer Kollineation $\mathfrak{P}(E_1) \to \mathfrak{P}(E_2)$ fortsetzen; diese kann durch eine semilineare Transformation $\Phi : E_1 \to E_2$ induziert werden. Weil Φ das Filter der offenen Unterräume von E_1 auf das von E_2 abbildet, ist es ein Homöomorphismus. Wir zeigen nun, daß der von Φ induzierte Ringisomorphismus $\alpha \in \mathfrak{R}(E_1) \to \Phi \circ \alpha \circ \Phi^{-1} \in \mathfrak{R}(E_2)$ mit σ übereinstimmt. Für jedes $\pi \in \Pi_1$ gilt $\Phi \circ \pi \circ \Phi^{-1}(E_2) = \Phi(\pi(E_1)) = \theta_2 \circ \overline{\sigma} \circ \theta_1^{-1}(\pi(E_1)) = \theta_2(\overline{\sigma}(\overline{\pi})) = \theta_2(\overline{\sigma(\pi)}) = \sigma(\pi)(E_2)$. Also sind $\Phi \circ \pi \circ \Phi^{-1}$ und $\sigma(\pi)$ Projektionen mit demselben Bildraum. Weil man in der vorstehenden Gleichung π durch $id - \pi$ ersetzen darf, haben $\Phi \circ \pi \circ \Phi^{-1}$ und $\sigma(\pi)$ auch denselben Kern. Somit gilt $\sigma(\pi) = \Phi \circ \pi \circ \Phi^{-1}$ für jedes $\pi \in \Pi_1$. Nun können wir uns auf (38) beziehen und erhalten $\sigma(\alpha) = \Phi \circ \alpha \circ \Phi^{-1}$ für jedes $\alpha \in \mathfrak{R}(E_1)$. Die noch ausstehende Eindeutigkeitsaussage ist schnell geklärt. Sind $\Phi_1, \Phi_2 : E_1 \to E_2$ zwei Abbildungen, die denselben Ringisomorphismus induzieren, so ist $\Phi_2^{-1} \circ \Phi_1$ mit jedem Element von $\mathfrak{R}(E_1)$ vertauschbar, insbesondere mit allen stetigen Projektionen vom Range 1. Dem entnehmen wir, daß $\Phi_2^{-1} \circ \Phi_1$ alle Punkte von E_1 fest läßt, also eine Homothetie ist. b) Weil $\alpha \in \mathfrak{R}(E_1) \to \alpha^o \in \mathfrak{R}(E_1^o)$ ein Antiisomorphismus ist, liefert $\sigma(\alpha^o) := \tau(\alpha)$ einen Isomorphismus $\sigma : \mathfrak{R}(E_1^o) \to \mathfrak{R}(E_2)$. Damit ist b) auf a) zurückgespielt.

Zum Abschluß wollen wir darauf hinweisen, daß sich wie beim Verbandssatz auch für den Ringsatz einige Varianten angeben lassen. Der Ringsatz samt Beweis bleibt ungeändert bestehen, wenn man jeden der Ringe $\mathfrak{R}(E_i)$ ersetzt durch das Erzeugnis seiner Projektionen bzw. durch das Erzeugnis der Projektionen, die

endlichen Rang oder endlichen Defekt haben. Eine einfache Zusatzüberlegung zeigt, daß an die Stelle der Ringe $\mathfrak{R}(E_i)$ auch die Ideale der Endomorphismen endlichen Ranges treten können.

§4. STANDUNTERGRUPPEN DER AUTOMORPHISMENGRUPPE EINES LINEAREN SYSTEMS

Die beiden neuen Begriffe in der Überschrift dieses Paragraphen sind kaum erläuterungsbedürftig. Unter der Automorphismengruppe $\mathfrak{G} := \mathfrak{G}(E)$ eines vorgelegten linearen Systems E versteht man die Einheitengruppe des Ringes $\mathfrak{R}(E)$. Ist $\mathfrak{H} \subset \mathfrak{G}$ eine Untergruppe und $Z \in \mathfrak{P}(E)$ ein Unterraum, so nennen wir die Gruppe

$$\mathfrak{H}_Z := \{\alpha \in \mathfrak{H} \mid \alpha(Z) = Z\}$$

die Standuntergruppe von Z bzgl. $\mathfrak{H}$. Wenn wir ohne Angabe einer Bezugsgruppe von "Standuntergruppen" sprechen, so meinen wir stets Standuntergruppen bzgl. der vollen Automorphismengruppe $\mathfrak{G}$.

Ehe wir mit unseren Betrachtungen einsetzen, mag eine den größeren Zusammenhang beleuchtende Bemerkung am Platze sein. Alle nun folgenden Bemühungen tragen bei zur Gewinnung eines "Gruppensatzes" für lineare Systeme. Dieses Resultat wird die Frucht eines eingehenden Studiums der Standuntergruppen von Unterräumen sein, das wir im vorliegenden Paragraphen aufnehmen. In der nun folgenden ersten Phase soll dargetan werden, daß die Kenntnis der Standuntergruppen von Punkten genügt, um den projektiven Raum $\mathfrak{P}(E)$ sowie den Verband $\mathfrak{L}(E)$ der abgeschlossenen Unterräume im Untergruppenverband von $\mathfrak{G}$ sichtbar zu machen.

In den folgenden Betrachtungen werden wir überwiegend mit Transvektionen operieren. Dies ist wohl erzwungen, wenn man darauf aus ist, Fallunterscheidungen zu vermeiden. Zur Verdeutlichung meines Eindruckes bemerke ich, daß sich die Transvektionen unter den bequem handhabbaren Automorphismen eines linearen Systems durch folgende Eigenschaften auszeichnen. Erstens sind sie stets verfügbar und zweitens sind ihre Grundeigenschaften weitgehend unabhängig von der Charakteristik des Koordinatenkörpers.

Hinsichtlich der Bezeichnungen bleibt zu bemerken, daß wir die identische Abbildung eines Vektorraumes zu den Transvek-

tionen zählen. Unter einer zentralen Homothetie verstehen wir eine Homothetie mit Zentrumsfaktor $\neq 0$. - Zur Vermeidung von Mißverständnissen sei noch einmal daran erinnert, daß wir nur lineare Systeme der Dimension ≥ 3 betrachten.

(41) Das Zentrum von $\mathfrak{G}$ stimmt überein mit dem Zentralisator des Erzeugnisses der Transvektionen aus $\mathfrak{G}$. Es besteht aus den zentralen Homothetien.

Beweis. Weil es zu jedem Punkt $P \in \mathfrak{P}(E)$ eine Transvektion $\tau \in \mathfrak{G} - \{id\}$ mit P als Zentrum gibt, läßt ein Automorphismus $\alpha \in \mathfrak{G}$, der mit jeder Transvektion vertauschbar ist, alle Punkte fest. Demnach ist α eine Homothetie, und zwar eine zentrale, weil α linear ist. Da jede zentrale Homothetie dem Zentrum von $\mathfrak{G}$ angehört, ist unsere Behauptung bewiesen.

Auch der nächste Hilfssatz beschäftigt sich mit der Klärung von Routinefragen. Zur Abkürzung setzen wir

$$\hat{\mathfrak{G}} := \{\alpha \in \mathfrak{G} \mid \alpha \text{ hat einen offenen Fixpunktraum}\}.$$

Bei endlich-dimensionalem E gilt natürlich $\hat{\mathfrak{G}} = \mathfrak{G}$. Das 4. Beispiel aus §1 belegt, daß es auch lineare Systeme unendlicher Dimension gibt, deren Automorphismengruppe $\mathfrak{G}$ mit $\hat{\mathfrak{G}}$ übereinstimmt.

(42) a) Standuntergruppen verschiedener Unterräume $\neq 0$ sind verschieden.
b) Standuntergruppen sind normalisatorgleich.
c) Sind $Z, W \in \mathfrak{P}(E)$ Unterräume und ist $W \neq 0, E$, so gilt:

$$\hat{\mathfrak{G}}_Z \subset \hat{\mathfrak{G}}_W \Leftrightarrow Z \subset W \subset \overline{Z}.$$

Beweis. Wir überlegen zunächst
(*) $\hat{\mathfrak{G}}_Z \subset \hat{\mathfrak{G}}_W$, $W \neq 0 \Rightarrow Z \subset W$.
Gäbe es einen Punkt $P \subset Z$ mit $P \not\subset W$, so fände man wegen $W \neq 0$ eine offene Hyperebene H durch P, die W nicht umfaßt. Ei-Transvektion $\tau \in \hat{\mathfrak{G}} - \{id\}$ mit H als Achse und P als Zentrum ließe Z fest und würde W bewegen. Damit ist $Z \subset W$ begründet. Nun zu den Behauptungen unseres Hilfssatzes! a) ist eine unmittelbare Folge von (*). b) Normalisiert $\alpha \in \mathfrak{G}$ die Standuntergruppe des Unterraums $Z \neq 0$, so folgt $\mathfrak{G}_Z = \alpha \mathfrak{G}_Z \alpha^{-1} = \mathfrak{G}_{\alpha(Z)}$ und dann mit a) $\alpha(Z) = Z$, d. h. $\alpha \in \mathfrak{G}_Z$. c) Von ($\Rightarrow$) haben wir nur noch die Inklusion $W \subset \overline{Z}$ zu begründen. Dabei kann man

ähnlich schließen wie oben. Gäbe es eine offene Hyperebene H mit $H \supset Z$, $H \not\supset W$, so fände man wegen $W \neq E$ eine Transvektion $\tau \in \hat{G}_Z$, die W bewegte. Also enthält jede offene Hyperebene mit Z auch W. Nach (4a) folgt daraus $W \subset \overline{Z}$. ($\Leftarrow$) $\alpha \in \hat{G}_Z$ habe den maximalen offenen Fixpunktraum U. Wir dürfen unterstellen, daß $Z \neq \overline{Z}$, also E von unendlicher Dimension ist. Weil dann $\dim U = \dim E \geq 2$ gilt, ist die Einschränkung von α auf U eine zentrale Homothetie. Daraufhin dürfen wir annehmen, daß U aus den Fixvektoren von α besteht. Mit dem Homomorphiesatz folgt $Z/Z \cap U \cong (\alpha - id)(Z) \subset (\alpha - id)(\overline{Z}) \cong \overline{Z}/\overline{Z} \cap U$. Andererseits erhalten wir unter Benutzung von (7) die Ungleichung $\dim Z/Z \cap U = \dim \overline{Z}/\overline{Z \cap U} \geq \dim \overline{Z}/\overline{Z} \cap U$. Demnach sind $(\alpha - id)(Z)$ und $(\alpha - id)(\overline{Z})$ inzidierende Unterräume derselben endlichen Dimension, also gleich. Für $w \in W \subset \overline{Z}$ folgt jetzt $\alpha(w) \in w + Z \subset W$. Dies zeigt $\alpha(W) \subset W$. Gleiches gilt auch für α^{-1}, wir erhalten $\alpha(W) = W$, d. h. $\alpha \in \hat{G}_W$.

Aus Teil c) des vorstehenden Satzes ist zu entnehmen, daß Standuntergruppen nichttrivialer Unterräume höchstens dann vergleichbar sind, wenn die Unterräume dieselbe Hülle haben.

Wir bringen jetzt einen neuen Gesichtspunkt ins Spiel, der sich im weiteren als sehr fruchtbar erweisen wird. Jede Standuntergruppe besitzt nämlich eine Fittinggruppe, d. h. einen größten nilpotenten Normalteiler. Weil Standuntergruppen allgemein zu reden nicht endlich sind, ist dies ein beweisbedürftiger Sachverhalt. Was wir dazu an gruppentheoretischen Kenntnissen benötigen, ist rasch aufgezählt. Untergruppen und Faktorgruppen nilpotenter Gruppen sind nilpotent; eine nilpotente Gruppe besitzt keine echte normalisatorgleiche Untergruppe. An späterer Stelle werden wir davon Gebrauch machen, daß ein Produkt von zwei nilpotenten Normalteilern nilpotent ist.

Eine simple Schlußweise, die wir mehrfach benutzen werden, wollen wir im folgenden Hilfssatz fixieren.

Hilfssatz. Ein nilpotenter Normalteiler $N \neq 1$ einer 2-fach transitiven Permutationsgruppe G ist regulär.

Beweis. Nehmen wir an, daß N nicht regulär ist! Dann gibt es Ziffern $i \neq j$ und eine Permutation $\alpha \in N$ mit $\alpha(i) = i$, $\alpha(j) \neq j$. Zu vorgegebenem $k \neq i$ gibt es wegen der 2-fachen Transitivität von G ein $\pi \in G$ mit $\pi(i) = i$, $\pi(j) = k$. $\pi \circ \alpha \circ \pi^{-1}$

gehört zu N, läßt i fest und bewegt wegen $\pi \circ \alpha \circ \pi^{-1}(k) = \pi(\alpha(j)) \neq \pi(j) = k$ die Ziffer k. Also ist N_i eine echte bzgl. N normalisatorgleiche Untergruppe von N, folglich ist N nicht nilpotent.

(43) Ist $\mathfrak{n}$ ein nilpotenter Normalteiler der Standuntergruppe $\mathfrak{G}_U$, so gibt es zu jedem $\alpha \in \mathfrak{n}$ ein Zentrumselement $\lambda \in K^\times$ mit

$$\text{Bild}(\alpha - \lambda\,\text{id}) \subset \overline{U} \subset \text{Kern}(\alpha - \lambda\,\text{id}) .$$

Beweis. Weil O und E dieselbe Standuntergruppe haben, dürfen wir $U \neq O$ annehmen. Zunächst wollen wir uns dreierlei überlegen.

1) Läßt $\alpha \in \mathfrak{n}$ einen Punkt P fest, dann auch jeden Punkt von $U + P$.
Beweis. O. B. d. A. sei $U - P \neq \emptyset$. Im Falle $P \subset U$ lassen wir $\mathfrak{G}_U$ auf den Punkten von U operieren. Weil diese Darstellung 2-fach transitiv ist, folgt gemäß Hilfssatz, daß α jeden Punkt von $U = U + P$ fest läßt. Ist $P \not\subset U$, so betrachten wir $\mathfrak{G}_{U,U+P}$ als Permutationsgruppe auf den Punkten von $U + P$, die außerhalb von U liegen. Wiederum liegt 2-fache Transitivität vor. Weil $\mathfrak{n}_{U+P}$ ein nilpotenter Normalteiler von $\mathfrak{G}_{U,U+P}$ ist, läßt α alle außerhalb von U gelegenen Punkte von $U + P$ fest. Dann bleiben natürlich auch alle Punkte von U fest.

2) Für $\alpha \in \mathfrak{n}$ und einen Punkt $P \notin \overline{U}$ gilt $\alpha(P) \subset \overline{U} + P$.
Beweis. Andernfalls gibt es eine offene Hyperebene H durch $\overline{U} + P$, die $\alpha(P)$ meidet. $\tau \neq \text{id}$ sei eine Transvektion mit Achse H und Zentrum P. Wir bilden $\rho := \alpha\tau\alpha^{-1}\tau^{-1} \in \mathfrak{n}$ und legen eine Ebene Z durch $P + \alpha(P)$, die U trifft. $\mathfrak{G}_{U,Z}$ operiert 2-fach transitiv auf den Geraden von Z, die $Z \cap U$ meiden. Weil $\rho \in \mathfrak{n}_Z$ die Gerade $P + \alpha(P) \not\ni Z \cap U$ im ganzen, aber nicht punktweise fest läßt, ist $\mathfrak{n}_Z \subset \mathfrak{G}_{U,Z}$ ein nicht regulärer Normalteiler, also nicht nilpotent.

3) Jedes $\alpha \in \mathfrak{n}$ läßt U punktweise fest.
Beweis. Würde $\alpha \in \mathfrak{n}$ einen Punkt von U bewegen, so könnte man - ähnlich wie in 2) - durch Kommutatorbildung mit einer passenden Transvektion aus $\mathfrak{G}_U$ ein fixpunktbehaftetes Mitglied von $\mathfrak{n}$ herstellen, das U nicht punktweise fest ließe. Dies widerspräche 1).

Wir fixieren jetzt ein Mitglied $\alpha \in \mathfrak{n}$ und nehmen eine Fall-

unterscheidung vor.

1. Fall: $\dim U = 1$. Weil α nach 2) jede Gerade durch U fest läßt, ist α bis auf eine zentrale Homothetie eine Transvektion oder eine Streckung mit Zentrum U. Echte Streckungen kommen wegen 1) nicht in Betracht.

2. Fall: $\dim U > 1$. Wegen 3) und $\dim U > 1$ induziert α in U eine zentrale Homothetie mit Faktor $\lambda \in K^\times$. Weil der Kern des stetigen Endomorphismus $\alpha - \lambda\,\mathrm{id}$ abgeschlossen ist, folgt $\overline{U} \subset \mathrm{Kern}(\alpha - \lambda\,\mathrm{id})$. Zur Begründung der noch fehlenden Inklusion fixieren wir einen Punkt $P \notin \overline{U}$. Wegen 2) läßt α den Unterraum $\overline{U} + P$ im ganzen fest. 1) zeigt, daß die Einschränkung von $\lambda^{-1}\alpha$ auf $\overline{U} + P$ eine Transvektion mit Achse $\overline{U}$ ist. Dies genügt zur Begründung von $\mathrm{Bild}(\alpha - \lambda\,\mathrm{id}) \subset \overline{U}$.

Wir fügen eine Bemerkung ein, auf die wir uns alsbald beziehen wollen. Die Anordnung des Beweises von (43) zeigt, daß es zu jedem Automorphismus $\alpha \in \mathfrak{G}$, der die in 1) - 3) genannten Eigenschaften besitzt, ein Zentrumselement $\lambda \in K^\times$ gibt derart, daß $\mathrm{Bild}(\alpha - \lambda\,\mathrm{id}) \subset \overline{U} \subset \mathrm{Kern}(\alpha - \lambda\,\mathrm{id})$ gilt.

Mittels (43) können wir jetzt die Fittinggruppe einer Standuntergruppe vorzeigen. F(G) bezeichne die Fittinggruppe der Gruppe G.

(44) a) Die Standuntergruppe $\mathfrak{G}_U$ eines Unterraums $U \in \mathfrak{P}(E)$ besitzt eine Fittinggruppe. Diese ist das direkte Produkt des abelschen Normalteilers $\mathfrak{n} := \{\alpha \in \mathfrak{G} \mid \mathrm{Bild}(\alpha - \mathrm{id}) \subset \overline{U} \subset \mathrm{Kern}(\alpha - \mathrm{id})\}$ von $\mathfrak{G}_U$ mit dem Zentrum $Z(\mathfrak{G})$.

b) Für einen Automorphismus $\alpha \in \mathfrak{G}$ gilt:

$$\alpha \in F(\mathfrak{G}_U) \Leftrightarrow \begin{cases} \text{i) } \alpha \text{ läßt den Unterraum } \overline{U} \text{ und das Bündel } E/\overline{U} \\ \quad \text{jeweils punktweise fest;} \\ \text{ii) die Fixpunkte von } \alpha \text{ bilden einen Unterraum.} \end{cases}$$

Beweis. a) $\mathfrak{n}$ ist jedenfalls eine nichtleere Teilmenge von $\mathfrak{G}_U$. Aus der für je zwei Mitglieder $\alpha, \beta \in \mathfrak{n}$ gültigen Beziehung $(\alpha - \mathrm{id})(\beta - \mathrm{id}) = 0$ folgt $\alpha\beta - \mathrm{id} = (\alpha - \mathrm{id}) + (\beta - \mathrm{id})$. Dies zeigt die Vertauschbarkeit von α und β sowie $\alpha\beta \in \mathfrak{n}$. Weil für jeden Vektorraumautomorphismus α die Endomorphismen $\alpha^{-1} - \mathrm{id}$ und $\alpha - \mathrm{id}$ denselben Kern und dasselbe Bild besitzen, enthält $\mathfrak{n}$ mit jedem Element auch das Inverse. Für $\alpha \in \mathfrak{n}$, $\gamma \in \mathfrak{G}_U$ erhalten wir $\mathrm{Bild}(\gamma\alpha\gamma^{-1} - \mathrm{id}) = \mathrm{Bild}(\gamma(\alpha - \mathrm{id})\gamma^{-1}) = \gamma(\mathrm{Bild}(\alpha - \mathrm{id}))$

$\subset \gamma(\overline{U}) = \overline{\gamma(U)} = \overline{U}$, $\mathrm{Kern}(\gamma\alpha\gamma^{-1} - \mathrm{id}) = \ldots = \gamma(\mathrm{Kern}(\alpha - \mathrm{id})) \supset \gamma(\overline{U}) = \overline{U}$ und damit $\gamma\alpha\gamma^{-1} \in \mathfrak{n}$. Insgesamt ist jetzt sichergestellt, daß $\mathfrak{n}$ ein abelscher Normalteiler von $\mathfrak{G}_U$ ist. Gleiches gilt dann auch für $\mathfrak{n} Z(\mathfrak{G})$. Wegen $\mathfrak{n} \cap Z(\mathfrak{G}) = \{\mathrm{id}\}$ ist das Produkt direkt. Weil gemäß (43) jeder nilpotente Normalteiler von $\mathfrak{G}_U$ in $\mathfrak{n} Z(\mathfrak{G})$ steckt, ist $\mathfrak{n} Z(\mathfrak{G})$ die Fittinggruppe von $\mathfrak{G}_U$.
b) ($\Rightarrow$) Wir dürfen uns $\alpha \in \mathfrak{n}$ vorstellen. Die Gültigkeit von i) steht außer Zweifel. Weil die Fixpunkte von α gerade die Punkte des Unterraums $\mathrm{Kern}(\alpha - \mathrm{id})$ sind, gilt ii). ($\Leftarrow$) Jeder Automorphismus $\alpha \in \mathfrak{G}$ mit i) und ii) hat die im Beweis von (43) genannten Eigenschaften 1) - 3). Gemäß der nach (43) eingefügten Bemerkung folgt $\alpha \in F(\mathfrak{G}_U)$.

Wir wollen noch einen Augenblick bei den Fittinggruppen verweilen und einige naheliegende Fragen klären. Die teils sehr simplen Aussagen des ersten der beiden nun folgenden Sätze sind nützlich beim Umgang mit Fittinggruppen; der zweite Satz beschäftigt sich im wesentlichen mit dem Teil $F(\mathfrak{G}_U) \cap \hat{\mathfrak{G}}$ der Fittinggruppe von $\mathfrak{G}_U$, den wir in jedem Falle fest im Griff haben.

(45) $U \in \mathfrak{P}(E)$ sei ein Unterraum.
a) Stets gilt $F(\mathfrak{G}_U) = F(\mathfrak{G}_{\overline{U}})$.
b) Ist die Dimension oder die Kodimension von U endlich, so gilt $F(\mathfrak{G}_U) \subset \hat{\mathfrak{G}}$.
c) $F(\mathfrak{G}_U) = Z(\mathfrak{G}) \Leftrightarrow U = 0$ oder $\overline{U} = E$.
d) Für jedes $\alpha \in \mathfrak{G}$ gilt $\alpha F(\mathfrak{G}_U)\alpha^{-1} = F(\mathfrak{G}_{\alpha(U)})$.
e) Standuntergruppen verschiedener abgeschlossener Unterräume $\neq 0$ besitzen verschiedene Fittinggruppen. Diese sind nur dann vergleichbar, wenn einer der beiden Unterräume mit E übereinstimmt.
f) Ist $U \neq 0, E$ abgeschlossen, so bilden die nichtidentischen Transvektionen aus $F(\mathfrak{G}_U)$ eine Konjugiertenklasse von $\mathfrak{G}_U$.

Beweis. Daß a), b) und c) gelten, ist an Hand der expliziten Beschreibung von $F(\mathfrak{G}_U)$ in (44a) unmittelbar ersichtlich. Für den Teil ($\Rightarrow$) von c) hat man lediglich zu bemerken, daß $F(\mathfrak{G}_U)$ im Falle $\overline{U} \neq 0, E$ nichtidentische Transvektionen enthält.
d) Man braucht nur zu bedenken, daß das Transformieren mit α einen Gruppenisomorphismus zwischen $\mathfrak{G}_U$ und $\alpha\mathfrak{G}_U\alpha^{-1} = \mathfrak{G}_{\alpha(U)}$ vermittelt. e) $U, V \in \mathfrak{P}(E)$ seien abgeschlossene Unterräume mit

$F(\mathfrak{G}_U) \subset F(\mathfrak{G}_V)$. Im Falle $U \neq 0,E$ gibt es Punkte $P \subset U$ und offene Hyperebenen $H \supset U$. Die zu den Paaren (P,H) gehörigen Transvektionsgruppen liegen in $F(\mathfrak{G}_U)$ und dann nach Annahme auch in $F(\mathfrak{G}_V)$. Somit gilt $P \subset \overline{V} \subset H$ für jeden Punkt $P \subset U$ und jede offene Hyperebene $H \supset U$. Daraus folgt einerseits $U \subset \overline{V} = V$, andererseits $V = \overline{V} \subset \overline{U} = U$, insgesamt also $U = V$. Aus dem soeben Überlegten ist die Gültigkeit unserer Behauptung ohne weiteres zu ersehen. f) Wir zeigen zunächst, daß $\mathfrak{G}_U$ auf der Menge $\{(P,H) | P \subset U$ Punkt, $H \supset U$ offene Hyperebene$\}$ transitiv operiert. $(P_1,H_1),(P_2,H_2)$ seien zwei Mitglieder der genannten Menge. Im Falle $H_1 \neq H_2$ wählen wir einen Punkt P, der weder in H_1 noch in H_2 liegt. Natürlich gibt es eine Transvektion τ' mit Zentrum P und Achse $P + (H_1 \cap H_2)$, die $\tau'(H_1) = H_2$ leistet. Wegen der Offenheit der Achse ist τ' ein Automorphismus, der wegen $U \subset H_1 \cap H_2 \subset P + (H_1 \cap H_2)$ zu $\mathfrak{G}_U$ gehört. Im Falle $H_1 = H_2$ setzen wir $\tau' := id$. Durch eine ähnliche Überlegung findet man eine Transvektion $\tau'' \in \mathfrak{G}_U$ mit $\tau''(\tau'(P_1)) = P_2$ und $\tau''(H_2) = H_2$. $\alpha := \tau''\tau' \in \mathfrak{G}_U$ führt dann (P_1,H_1) über in (P_2,H_2). Die eingangs aufgestellte Behauptung ist damit abgesichert. Übrigens hat dabei die Abgeschlossenheit von U keine Rolle gespielt. Nun zum Beweis unserer Behauptung! Wegen $\overline{U} \neq 0,E$ enthält $F(\mathfrak{G}_U)$ nichtidentische Transvektionen; $\tau_1,\tau_2 \in F(\mathfrak{G}_U)$ seien solche. Weil U abgeschlossen ist, gehören ihre Zentren zu U. Gemäß unserer Vorbetrachtung gibt es ein $\alpha \in \mathfrak{G}_U$ derart, daß $\tau_1' := \alpha\tau_1\alpha^{-1}$ und τ_2 dasselbe Zentrum und dieselbe Achse H besitzen. Nun braucht man nur noch zu bedenken, daß sämtliche Streckungen mit Achse H zu $\mathfrak{G}_U$ gehören. Unter diesen gibt es solche, die τ_1' in τ_2 transformieren.

(46) $U \in \mathfrak{P}(E)$ sei ein Unterraum.
a) $F(\mathfrak{G}_U) \cap \hat{\mathfrak{G}} = \langle \tau \in F(\mathfrak{G}_U) | \tau$ Transvektion$\rangle\, Z(\mathfrak{G})$.
b) Im Falle $\overline{U} \neq 0,E$ ist $F(\mathfrak{G}_U)$ zentralisatorgleich.
c) Ist $U \neq 0,E$ abgeschlossen, so ist $F(\mathfrak{G}_U) \cap \hat{\mathfrak{G}}$ der kleinste $Z(\mathfrak{G})$ echt umfassende Normalteiler von $\mathfrak{G}_U$.

Beweis. a) Wir haben nur zu zeigen, daß jedes $\alpha \in F(\mathfrak{G}_U) \cap \hat{\mathfrak{G}}$ bis auf eine zentrale Homothetie als Produkt von Transvektionen aus $F(\mathfrak{G}_U)$ dargestellt werden kann. Dabei dürfen wir natürlich $\mathrm{Kern}(\alpha - id) \supset \overline{U}$ annehmen. Im Falle $\mathrm{Kern}(\alpha - id) \neq E$ legen wir

eine offene Hyperebene H durch Kern(α - id) und wählen dann einen beliebigen Punkt $P \notin H$. Weil Kern(α - id) der Fixpunktraum von α ist, gilt $\alpha(P) \neq P$. Wegen Bild(α - id) $\subset \overline{U}$ ist $Q := (P + \alpha(P)) \cap H$ ein Punkt von $\overline{U}$. Folglich gehört die Transvektion τ, die $\tau\alpha(P) = P$ leistet und H als Achse besitzt, zu $F(\mathfrak{G}_U)$. Für das Produkt $\tau\alpha$ gilt Kern($\tau\alpha$ - id) $\supset$ Kern(α - id) + P $\supset\supset$ Kern(α - id). Weil Kern(α - id) wegen $\alpha \in \hat{\mathfrak{G}}$ von endlicher Kodimension ist, zeigt die eben vollzogene Überlegung, daß α als Produkt von Transvektionen aus $F(\mathfrak{G}_U)$ dargestellt werden kann. b) Wegen (45a) dürfen wir annehmen, daß U abgeschlossen ist. Ein Mitglied α des Zentralisators von $F(\mathfrak{G}_U)$ ist insbesondere mit allen Transvektionen aus $F(\mathfrak{G}_U)$ vertauschbar. Deshalb läßt α jedes Element der wegen $\overline{U} = U \neq 0, E$ nichtleeren Menge $\{(P, H) \mid P \subset U$ Punkt, $H \supset U$ offene Hyperebene$\}$ fest. Also läßt α U und E/U jeweils punktweise fest. Für jeden Punkt $P \notin U$ bilden die außerhalb von U gelegenen Punkte von U + P wegen der Abgeschlossenheit von U eine Bahn bzgl. $F(\mathfrak{G}_U)$. Dem entnehmen wir, daß α im Falle $\alpha(P) = P$ jeden Punkt von U + P fest läßt. Dies und das punktweise Festbleiben von E/U gewährleisten die Unterraumeigenschaft der Fixpunktmenge von α. Nun können wir uns auf (44b) berufen und erhalten $\alpha \in F(\mathfrak{G}_U)$. Weil andererseits die Fittinggruppe $F(\mathfrak{G}_U)$ nach (44a) abelsch ist, stimmt sie mit ihrem Zentralisator überein. c) $F(\mathfrak{G}_U) \cap \hat{\mathfrak{G}}$ ist natürlich ein Normalteiler von $\mathfrak{G}_U$, der wegen $\overline{U} \neq 0, E$ das Zentrum $Z(\mathfrak{G})$ echt umfaßt. Nun denken wir uns einen Normalteiler $\mathfrak{N} \subset \mathfrak{G}_U$ von $\mathfrak{G}_U$ mit $\mathfrak{N} \supset\supset Z(\mathfrak{G})$ vorgelegt. Es genügt zu zeigen, daß $\mathfrak{N}$ und $F(\mathfrak{G}_U)$ eine nichtidentische Transvektion gemeinsam haben. Wegen der Abgeschlossenheit von U gehören dann nämlich gemäß (45f) sämtliche Transvektionen von $F(\mathfrak{G}_U)$ zu $\mathfrak{N}$, was in Anbetracht von a) zu der erwünschten Situation $\mathfrak{N} \supset F(\mathfrak{G}_U) \cap \hat{\mathfrak{G}}$ führt. Um Transvektionen in $\mathfrak{N} \cap \mathfrak{G}_U$ auszumachen, überlegen wir zunächst, daß $\mathfrak{N} \cap F(\mathfrak{G}_U) \neq Z(\mathfrak{G})$ gilt. Zu einem Element $\alpha \in \mathfrak{N} - F(\mathfrak{G}_U)$ gibt es wegen b) ain $\beta \in F(\mathfrak{G}_U)$, das mit α nicht vertauschbar ist. $\rho := \alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1} \neq id$ gehört natürlich zu $\mathfrak{N} \cap F(\mathfrak{G}_U)$ und ist wegen $\rho(x) = x$ auf $U \neq 0$ keine Homothetie. Daraufhin finden wir ein Element $\alpha \in \mathfrak{N} \cap F(\mathfrak{G}_U) - Z(\mathfrak{G})$. Ist U eine Hyperebene, so ist α bis auf eine zentrale Homothetie eine Transvektion $\neq id$. Andernfalls wählen wir einen Punkt $P \notin U$ mit $\alpha(P) \neq P$ und können dann eine offene Hyperebene H durch P + U legen. Wir fixieren eine Transvektion $\tau \neq id$ mit Achse H und Zentrum P; τ gehört

natürlich zu $\mathfrak{G}_U$. Weil $\alpha \in F(\mathfrak{G}_U)$ H im ganzen fest läßt und den Punkt P bewegt, ist $\alpha\tau\alpha^{-1}\tau^{-1} \in \mathfrak{H} \cap F(\mathfrak{G}_U)$ Produkt zweier Transvektionen mit übereinstimmenden Achsen, aber verschiedenen Zentren, also selbst eine nichtidentische Transvektion.

Dem eben bewiesenen Satz möchten wir noch zwei Bemerkungen anfügen. Erstens besitzt die Standuntergruppe $\mathfrak{G}_U$ eines Unterraums U mit $\overline{U} \neq 0,E$ wegen (46b) und (44a) genau einen zentralisatorgleichen Normalteiler, nämlich $F(\mathfrak{G}_U)$. Zweitens zeigt (46c), daß die Fittinggruppe der Standuntergruppe eines nichttrivialen diskreten oder offenen Unterraums auch durch eine Minimaleigenschaft gekennzeichnet werden kann.

Mit unseren Kenntnissen können wir jetzt zeigen, daß man im Untergruppenverband von $\mathfrak{G}$ den projektiven Raum $\mathfrak{P}(E)$ und den Verband $\mathfrak{L}(E)$ rekonstruieren kann, sofern man im Besitze der Standuntergruppen der Punkte ist. Dazu hat man einige einfache Überlegungen zu durchlaufen; der Übersichtlichkeit wegen soll dies vorweg in einem Hilfssatz geschehen. Für eine Untergruppe $\mathfrak{H} \subset \mathfrak{G}$ bezeichne $\mathfrak{N}(\mathfrak{H})$ den Normalisator von $\mathfrak{H}$ in $\mathfrak{G}$. Außerdem ordnen wir jeder Untergruppe $\mathfrak{H} \subset \mathfrak{G}$ vermöge

$$\mathfrak{p}(\mathfrak{H}) := \{P \in \mathfrak{P}(E) \mid P \text{ ein Punkt mit } F(\mathfrak{G}_P) \subset \mathfrak{H}\}$$

eine Menge von Punkten zu. Für die meisten Untergruppen von $\mathfrak{G}$ ist diese Menge natürlich leer.

(47) a) $\mathfrak{p}(\mathfrak{H})$ ist die Menge der Punkte eines Unterraums von E.
b) Ist $U \neq 0$ ein Unterraum, so stimmt $\mathfrak{p}(\mathfrak{G}_U)$ überein mit der Menge der Punkte von U.
c) Für die Standuntergruppe eines Unterraums U gilt

$$\mathfrak{G}_U = \mathfrak{N}(\langle F(\mathfrak{G}_P) \mid P \in \mathfrak{p}(\mathfrak{G}_U)\rangle).$$

Beweis. a) Wir haben zu zeigen, daß $\mathfrak{p}(\mathfrak{H})$ mit zwei verschiedenen Punkten P,Q jeden Punkt der Verbindungsgeraden von P + Q enthält. Weil $F(\mathfrak{G}_P) \subset \mathfrak{H}$ auf den von P verschiedenen Punkten von P + Q transitiv operiert, gibt es zu einem vorgelegten Punkt $R \subset P + Q$ mit $R \neq P$ ein $\alpha \in \mathfrak{H}$ mit $\alpha(Q) = R$. Wegen $F(\mathfrak{G}_Q) \subset \mathfrak{H}$ folgt mit (45d) $F(\mathfrak{G}_R) = F(\mathfrak{G}_{\alpha(Q)}) = \alpha F(\mathfrak{G}_Q)\alpha^{-1} \subset \mathfrak{H}$, d. h. $R \in \mathfrak{p}(\mathfrak{H})$. b) Man braucht nur zu bedenken, daß $F(\mathfrak{G}_P)$ ($P \in \mathfrak{P}(E)$ ein Punkt) das Bündel der Unterräume durch P elementweise fest läßt, aber jeden Unterraum $U \neq 0$, der P meidet, bewegt. c) O. B. d. A. sei $U \neq 0$. Wegen b) ist klar, daß $\mathfrak{G}_U$ die Gruppe $\mathfrak{H} :=$

$\langle F(\mathfrak{G}_P) \mid P \in \mathfrak{p}(\mathfrak{G}_U)\rangle$ normalisiert. Andererseits gilt $\mathfrak{H} \subset \mathfrak{G}_U$, also auch $\mathfrak{p}(\mathfrak{H}) \subset \mathfrak{p}(\mathfrak{G}_U)$. Weil die umgekehrte Inklusion ohnehin besteht, erhalten wir $\mathfrak{p}(\mathfrak{H}) = \mathfrak{p}(\mathfrak{G}_U)$. Gemäß b) ist dann $\mathfrak{p}(\mathfrak{H})$ die Menge der Punkte von U. Weil jedes Mitglied α des Normalisators von $\mathfrak{H}$ die Menge $\mathfrak{p}(\mathfrak{H})$ auf sich abbildet, folgt $\alpha(U) = U$, d. h. $\alpha \in \mathfrak{G}_U$. Damit ist die gewünschte Gleichheit bewiesen.

Nach diesen Vorüberlegungen erhalten wir ohne weiteres das folgende Resultat.

(48) a) Eine Untergruppe $\mathfrak{H} \subset \mathfrak{G}$ ist genau dann die Standuntergruppe eines Unterraums, wenn $\mathfrak{H} = \mathfrak{N}(\langle F(\mathfrak{G}_P) \mid P \in \mathfrak{p}(\mathfrak{H})\rangle)$ gilt.
b) $U,V \neq 0$ seien Unterräume. Dann gilt

$$U \subset V \quad \Leftrightarrow \quad \mathfrak{p}(\mathfrak{G}_U) \subset \mathfrak{p}(\mathfrak{G}_V)\,.$$

c) Für jedes $U \in \mathfrak{P}(E)$ ist $\mathfrak{N}(F(\mathfrak{G}_U)) = \mathfrak{G}_{\overline{U}}$.

Beweis. a) Nach (47c) besitzen Standuntergruppen von Unterräumen die genannte Eigenschaft. Umgekehrt folgt aus $\mathfrak{H} = \mathfrak{N}(\langle F(\mathfrak{G}_P) \mid P \in \mathfrak{p}(\mathfrak{H})\rangle)$ zunächst $\mathfrak{p}(\mathfrak{H}) \neq \phi$. Folglich ist $U := \sum_{P \in \mathfrak{p}(\mathfrak{H})} P \neq 0$, wir dürfen (47b) heranziehen. Zusammen mit (47a) folgt $\mathfrak{p}(\mathfrak{G}_U) = \mathfrak{p}(\mathfrak{H})$ und daraus unter Benutzung der Voraussetzung in Verbindung mit (47c) $\mathfrak{H} = \mathfrak{G}_U$. b) folgt unmittelbar aus (47b). c) Wir dürfen $U \neq 0$ annehmen. Wegen (45a) ist nur die Inklusion $\mathfrak{N}(F(\mathfrak{G}_U)) \subset \mathfrak{G}_{\overline{U}}$ zweifelhaft. Für jedes $\alpha \in \mathfrak{N}(F(\mathfrak{G}_U))$ folgt wegen (45a,d) $F(\mathfrak{G}_{\overline{U}}) = \alpha F(\mathfrak{G}_{\overline{U}})\alpha^{-1} = F(\mathfrak{G}_{\alpha(\overline{U})})$ und daraus nach (45e) $\alpha(\overline{U}) = \overline{U}$, d. h. $\alpha \in \mathfrak{G}_{\overline{U}}$.

Um das Resultat (48) noch etwas zu verdeutlichen, wollen wir uns in die folgende Lage versetzt denken. Vorgelegt sei eine Gruppe $\mathfrak{G}$ zusammen mit einer Untergruppe $\mathfrak{S}_o \subset \mathfrak{G}$; an Kenntnissen sei nur verfügbar, daß $\mathfrak{G}$ die Automorphismengruppe eines linearen Systems der Dimension ≥ 3 und $\mathfrak{S}_o$ die Standuntergruppe eines Punktes ist. Wir wollen uns jetzt überlegen, daß diese bescheidenen Kenntnisse ausreichen, um das zur Bildung von $\mathfrak{G}$ benutzte lineare System zu identifizieren. Als erstes bemerken wir, daß die Standuntergruppen der Punkte eine Konjugiertenklasse von $\mathfrak{G}$ bilden, weil nämlich $\mathfrak{G}$ transitiv auf den Punkten operiert. Demnach ist $\mathfrak{K} := \{\alpha\mathfrak{S}_o\alpha^{-1} \mid \alpha \in \mathfrak{G}\}$ das System sämtlicher Standuntergruppen von Punkten. Für eine Untergruppe $\mathfrak{H} \subset \mathfrak{G}$ sei $\tilde{\mathfrak{p}}(\mathfrak{H}) := \{\mathfrak{S} \in \mathfrak{K} \mid F(\mathfrak{S}) \subset \mathfrak{H}\}$. Weil die Punkte und ihre

Standuntergruppen in Bijektion stehen, bleiben (47) und (48) sinngemäß gültig. Das System $\mathfrak{S}$ der Standuntergruppen ist durch (48a) charakterisiert. Übrigens gilt $\mathfrak{S} = \{\mathfrak{N}(\langle F(\mathfrak{g}) | \ \mathfrak{g} \in \mathfrak{R}_o \rangle) | \ \mathfrak{R}_o \subset \mathfrak{R}\}$. Im Falle $\mathfrak{R}_o \neq \emptyset$ besteht nämlich $\tilde{\mathfrak{p}}(\langle F(\mathfrak{g}) | \ \mathfrak{g} \in \mathfrak{R}_o \rangle)$ nach (47a) aus den Standuntergruppen der Punkte eines Unterraums $\neq 0$, (47b,c) weisen dann $\mathfrak{N}(\langle F(\mathfrak{g}) | \ \mathfrak{g} \in \mathfrak{R}_o \rangle)$ als Standuntergruppe eines Unterraums aus. Nach dieser Zwischenbemerkung ordnen wir $\mathfrak{S}$. (48b) sagt uns, wie das zu geschehen hat. Für $\mathfrak{J}_1$, $\mathfrak{J}_2 \in \mathfrak{S}$ sei $\mathfrak{J}_1 \leq \mathfrak{J}_2 :\Leftrightarrow \tilde{\mathfrak{p}}(\mathfrak{J}_1) \subset \tilde{\mathfrak{p}}(\mathfrak{J}_2)$. Die so geordnete Menge $\mathfrak{S}$ ist isomorph zu $\mathfrak{P}(E) - \{0\}$. Wegen (48c) entspricht der Übergang $\mathfrak{J} \in \mathfrak{S} \to \mathfrak{N}(F(\mathfrak{J})) \in \mathfrak{S}$ der Hüllenbildung in E. Weil wir $\dim E \geq 3$ vorausgesetzt haben, ist das lineare System E durch $\mathfrak{S}$ mit der zugehörigen Hüllenbildung bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt.

Hinsichtlich des Gruppensatzes ist zu bemerken, daß die vorstehenden Betrachtungen unter anderem zu einer Zuspitzung des Problems führen. Wenn man von einem Automorphismus von $\mathfrak{G}$ weiß, daß er die Standuntergruppen von Punkten in ebensolche überführt, so induziert er auf Grund der vorstehenden Überlegungen eine Kollineation des projektiven Raumes $\mathfrak{P}(E)$ und ist dann weitgehend erfaßbar. Zu klären bleibt die Frage, was ein Automorphismus von $\mathfrak{G}$ mit der Standuntergruppe eines Punktes anrichten kann.

Wir beschließen diesen Abschnitt mit einigen ergänzenden Bemerkungen über Standuntergruppen diskreter oder offener Unterräume. Unter anderem werden wir die naheliegende Vermutung bestätigen, daß solche Standuntergruppen - von den Trivialfällen abgesehen - maximale Untergruppen von $\mathfrak{G}$ sind. Auf Grund dieser Einsicht kann man eine einfache Kennzeichnung der in Rede stehenden Standuntergruppen gewinnen, sofern nur die Standuntergruppen der Punkte und der offenen Hyperebenen verfügbar sind.

Ehe wir unsere Betrachtungen aufnehmen, wollen wir noch zwei Vorbemerkungen einschieben. Erstens können je zwei diskrete Unterräume V_1, V_2 gleicher Dimension durch ein Produkt von Transvektionen ineinander übergeführt werden. Weil $Z := V_1 + V_2$ von endlicher Dimension ist, gibt es ein Produkt von Transvektionen $\alpha_o = \tau_{1o} \circ \ldots \circ \tau_{ro} \in GL(Z)$, das $\alpha_o(V_1) = V_2$ leistet. Nun wähle man ein offenes Komplement W für Z in E. τ_i sei die Fortsetzung von τ_{io} auf E, die W vektorweise fest läßt. Jedes τ_i ist eine Transvektion und wegen des offenen Fixpunktraumes

topologisch, $\alpha := \tau_1 \circ \ldots \circ \tau_r$ leistet das Verlangte. Weil der eben begründete Sachverhalt auch im zu E konjugierten linearen System F^o gilt, operiert das Erzeugnis der Transvektionen aus $\mathfrak{G}$ auch transitiv auf der Menge der offenen Unterräume fester Kodimension. Die zweite Bemerkung betrifft einen Sachverhalt aus der Theorie der Permutationsgruppen. Wir fixieren einen Unterraum $U \neq 0,E$ und betrachten $\mathfrak{G}$ als Permutationsgruppe auf der Bahn $\Delta(U)$ von U. Bzgl. der Standuntergruppe $\mathfrak{G}_U$ zerfällt $\Delta(U)$ in Bahnen. Die Menge der eben genannten Bahnen steht in Bijektion mit dem System $\{\mathfrak{G}_U \alpha \mathfrak{G}_U \mid \alpha \in \mathfrak{G}\}$ der Doppelnebenklassen von $\mathfrak{G}_U$. Die Anzahl dieser Doppelnebenklassen nennen wir den <u>Doppelnebenklassenindex</u> $(\mathfrak{G}:(\mathfrak{G}_U,\mathfrak{G}_U))$ von $\mathfrak{G}_U$ in $\mathfrak{G}$.

(49) Die Standuntergruppe $\mathfrak{G}_U$ eines diskreten oder offenen Unterraums $U \neq 0,E$ ist eine maximale Untergruppe von $\mathfrak{G}$ mit

$$(\mathfrak{G}:(\mathfrak{G}_U,\mathfrak{G}_U)) = \min\{\dim U, \dim E/U\} + 1.$$

Beweis. Zum Nachweis der Maximalität denken wir uns eine $\mathfrak{G}_U$ echt umfassende Untergruppe $\mathfrak{H}$ von $\mathfrak{G}$. Wegen der Abgeschlossenheit von U bilden die in U bzw. außerhalb von U gelegenen Punkte je eine Bahn bzgl. $\mathfrak{G}_U$. Da $\mathfrak{H}$ den Unterraum U nicht fest läßt, operiert $\mathfrak{H}$ transitiv auf der Menge aller Punkte. Wegen $p(\mathfrak{G}_U) \neq \emptyset$ enthält dann $p(\mathfrak{H})$ sämtliche Punkte von $\mathfrak{P}(E)$. Also gehören sämtliche Transvektionen von $\mathfrak{G}$ zu $\mathfrak{H}$. Nun können wir ohne weiteres dartun, daß $\mathfrak{H}$ mit $\mathfrak{G}$ übereinstimmt. Weil U diskret oder offen ist, gibt es gemäß der ersten Vorbemerkung zu vorgelegtem $\alpha \in \mathfrak{G}$ ein Produkt von Transvektionen $\beta \in \mathfrak{H}$ mit $\beta\alpha(U) = U$. Wir erhalten $\beta\alpha \in \mathfrak{G}_U \subset \mathfrak{H}$ und damit $\alpha \in \mathfrak{H}$. Nun zum Beweis der zweiten Behauptung! Wir dürfen annehmen, daß U diskret ist. Der offene Fall kann nämlich durch Übergang zum konjugierten System E^o auf den diskreten zurückgespielt werden. Wir setzen $k := \dim U \in \mathbb{N}$. Zwei k-dimensionale Unterräume V_1, V_2 liegen höchstens dann in derselben Bahn bzgl. $\mathfrak{G}_U$, wenn die Durchschnitte $U \cap V_1$, $U \cap V_2$ von gleicher Dimension sind. Ist $\dim E \geq 2 \cdot \dim U$, so gibt es demnach mindestens $(\dim U) + 1$ Bahnen bzgl. $\mathfrak{G}_U$, andernfalls mindestens $(\dim E/U) + 1$. Damit ist gezeigt, daß der Doppelnebenklassenindex von $\mathfrak{G}_U$ in $\mathfrak{G}$ die im Satz genannte Zahl nicht unterschreitet. Zu zeigen bleibt, daß zwei k-dimensionale Unterräume V_1, V_2 mit $\dim U \cap V_1 = \dim U \cap V_2$ derselben Bahn von $\mathfrak{G}_U$ angehören. Weil $Z := U + V_1 + V_2$ von endlicher Dimension ist, finden wir ohne weiteres einen Automorphismus α_o von Z,

der U im ganzen fest läßt und $\alpha_o(V_1) = V_2$ leistet. Da α_o gemäß (10) zu einem Automorphismus $\alpha \in \mathfrak{G}_U$ fortgesetzt werden kann, liegen V_1, V_2 in derselben Bahn bzgl. $\mathfrak{G}_U$.

Wir wollen den eben bewiesenen Satz mit einigen Kommentaren versehen. Im Hinblick auf die erste Aussage unseres Satzes sei daran erinnert, daß die Maximalität der Standuntergruppe $\mathfrak{G}_U$ eines Unterraums $U \neq 0,E$ gleichwertig damit ist, daß $\mathfrak{G}$ primitiv auf der Bahn von U operiert. Nehmen wir uns jetzt die Formel für den Doppelnebenklassenindex vor! Erstens ist die Dimension von U durch den Doppelnebenklassenindex seiner Standuntergruppe nicht eindeutig bestimmt. Zweitens stimmen wegen der Voraussetzung über U die Dimensionen von E/U und U' überein. Demnach zeigt unsere Formel, daß das Minimum der Dimensionen von U und U' eine Invariante von $\mathfrak{G}_U$ ist. Dies ist sehr plausibel, zumal wegen der Isomorphie $\mathfrak{G} \cong \mathfrak{G}^o$ die Gruppe $\mathfrak{G}_U$ auch angesehen werden kann als Standuntergruppe des Unterraumes $U' \in \mathfrak{P}(E^o)$. Übrigens ist dem eben genannten Sachverhalt zu entnehmen, daß die Dimension von U an Hand der Standuntergruppe $\mathfrak{G}_U$ mit gruppentheoretischen Mitteln alleine nicht bestimmbar ist. Schließlich kann man fragen, welche Rolle die Voraussetzung "U diskret oder offen" spielt. Die Standuntergruppe eines Unterraums $U \neq 0,E$ ist jedenfalls höchstens dann maximal, wenn U abgeschlossen oder dicht ist. Ferner ist ohne weiteres zu sehen, daß der Doppelnebenklassenindex der Standuntergruppe eines Unterraums, dessen Dimension und Kodimension beide unendlich sind, unendlich ist. Zur Frage der Maximalität von Standuntergruppen dichter Unterräume kann ich überhaupt nichts sagen; dasselbe gilt für den Doppelnebenklassenindex. Ich weiß lediglich, daß über die Maximalität von Standuntergruppen abgeschlossener Unterräume, die weder diskret noch offen sind, nichts Allgemeingültiges ausgesagt werden kann. Ich belege dies durch zwei Beispiele, verzichte jedoch auf die Einzelausführungen. Betrachten wir zunächst das im 4. Beispiel von §1 konstruierte lineare System. Hier gelten die Aussagen von (49) für jeden abgeschlossenen Unterraum $\neq 0,E$. Da für lineare Systeme unendlicher Dimension generell $\mathfrak{L}(E) \neq \mathfrak{L}_{oo}(E)$ gilt, ist dargetan, daß es abgeschlossene Unterräume mit maximaler Standuntergruppe gibt, die weder diskret noch offen sind. Außerdem erscheint mir erwähnenswert, daß Standuntergruppen

dichter Hyperebenen den Doppelnebenklassenindex 2 besitzen und folglich maximale Untergruppen sind. Nach dieser Abschweifung zum zweiten Beispiel! Wir gehen aus von einem Vektorraum E unendlicher Dimension und führen die von E^* induzierte Topologie ein. Jeder Unterraum des so gewonnenen linearen Systems E ist abgeschlossen, die Automorphismengruppe $\mathfrak{G}$ von E stimmt natürlich mit der vollen linearen Gruppe überein. Man sieht ohne weiteres, daß $\mathfrak{G}$ auf der Bahn eines Unterraums $U \in \mathfrak{P}(E)$ mit $\dim U, \dim E/U \geq \omega$ imprimitiv operiert. Folglich ist die Standuntergruppe $\mathfrak{G}_U$ nicht maximal.

Beim zuletzt betrachteten Beispiel zeigt sich ein Phänomen, das ich nicht unerwähnt lassen möchte: Die Doppelnebenklassenindizes von Standuntergruppen können respektable Größenordnungen erreichen. Wegen $(\mathfrak{G}:(\mathfrak{G}_U,\mathfrak{G}_U)) \geq \min\{\dim U, \dim E/U\}$ findet man Standuntergruppen, deren Doppelnebenklassenindizes mindestens so groß sind wie die Dimension von E.

Der folgende Satz soll den Abschluß dieses Paragraphen bilden.

(50) a) $P_1,\ldots,P_n \in \mathfrak{P}(E)$ seien Punkte mit $U := \sum_{i=1}^{n} P_i \neq E$. Dann ist jede maximale Untergruppe von $\mathfrak{G}$, die $\bigcap_{i=1}^{n} \mathfrak{G}_{P_i}$ umfaßt, die Standuntergruppe eines Unterraums von U.

b) $H_1,\ldots,H_n \in \mathfrak{P}(E)$ seien offene Hyperebenen mit $U := \bigcap_{i=1}^{n} H_i \neq 0$. Dann ist jede maximale Untergruppe von $\mathfrak{G}$, die $\bigcap_{i=1}^{n} \mathfrak{G}_{H_i}$ umfaßt, die Standuntergruppe eines U enthaltenden Unterraums.

Beweis. Wir brauchen nur eine der beiden Behauptungen zu beweisen, weil die andere dann durch Übergang zu $\mathfrak{G}^0$ gewonnen werden kann. Aus bezeichnungstechnischen Gründen bevorzugen wir b). $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{G}$ sei eine maximale Untergruppe, die $\mathfrak{H} := \bigcap_{i=1}^{n} \mathfrak{G}_{H_i}$ enthält. Wir führen die Annahme, daß E der einzige U umfassende $\mathfrak{M}$-invariante Unterraum ist, zu einem Widerspruch. Wegen $U \neq 0$ gibt es einen Punkt $P \in \mathfrak{p}(\mathfrak{H}) \subset \mathfrak{p}(\mathfrak{M})$. Weil $\mathfrak{H}$ transitiv auf den Punkten von $\mathfrak{p}(\mathfrak{H})$ operiert, ist $\sum_{\alpha \in \mathfrak{M}} \alpha(P)$ ein U umfassender $\mathfrak{M}$-invarianter Unterraum, nach Annahme also gleich E. Mit (47a) folgt daraus wegen $\{\alpha(P) \mid \alpha \in \mathfrak{M}\} \subset \mathfrak{p}(\mathfrak{M})$, daß $\mathfrak{p}(\mathfrak{M})$ sämtliche Punkte von E enthält; dann gehören natürlich sämtliche Transvektionen aus $\mathfrak{G}$ zu $\mathfrak{M}$. Weil außerdem $Z(\mathfrak{G})$ und sämtliche Streckungen mit Zen-

trum P zu $\mathfrak{H} \subset \mathfrak{m}$ gehören, steckt $\hat{\mathfrak{G}}$ in $\mathfrak{m}$. Nun brauchen wir nur noch zu bemerken, daß es wegen der Offenheit von U zu vorgelegtem $\alpha \in \mathfrak{G}$ ein $\beta \in \hat{\mathfrak{G}}$ gibt derart, daß $\beta\alpha$ den Unterraum U im ganzen und ein Komplement von U punktweise fest läßt. Weil $\beta\alpha$ sämtliche Hyperebenen $H_i \supset U$ fest läßt, erhalten wir $\beta\alpha \in \mathfrak{H} \subset \mathfrak{m}$, dann $\alpha \in \mathfrak{m}$ und insgesamt den Widerspruch $\mathfrak{m} = \mathfrak{G}$. Daraufhin gibt es einen $\mathfrak{m}$-invarianten Unterraum $W \neq E$ mit $W \supset U$. Wegen $\mathfrak{m} \subset \mathfrak{G}_W$ und der Maximalität von $\mathfrak{m}$ folgt die erwünschte Gleichheit $\mathfrak{m} = \mathfrak{G}_W$.

Am Rande sei bemerkt, daß zur Gewinnung von (49) und (50) unser Satz (44) nicht erforderlich ist. Wir haben zwar mit Gruppen $F(\mathfrak{G}_p)$ hantiert, aber nirgends benutzt, daß $F(\mathfrak{G}_p)$ die Fittinggruppe von $\mathfrak{G}_p$ ist.

§5. DER GRUPPENSATZ

Unser nächstes Ziel soll es sein, das aus den beiden Konjugiertenklassen der Standuntergruppen von Punkten bzw. offenen Hyperebenen zusammengesetzte Untergruppensystem zu kennzeichnen. Wenn dies geleistet ist, sind wir in der Lage, Isomorphismen zwischen Automorphismengruppen linearer Systeme zu erfassen, soweit sich diese geometrisch bemerkbar machen. Dem Beweis des Gruppensatzes steht dann nichts mehr im Wege.

Zur Gewinnung des Gruppensatzes ist an sich nur der Nachweis erforderlich, daß das in Rede stehende System von Standuntergruppen überhaupt gruppentheoretisch charakterisierbar ist. Weil mir dieses Kennzeichnungsproblem aber sehr reizvoll erscheint, möchte ich es etwas eingehender behandeln. Mein Bestreben zielt darauf ab, eine Charakterisierung durch ein System von Eigenschaften zu finden, das frei von offenkundigen Redundanzen ist. Für den Fall, daß der Koordinatenkörper endlichen Grad über seinem Zentrum besitzt, werden wir ein - wie ich meine - glattes Resultat erzielen. Ohne Zusatzvoraussetzungen über den Körper führen meine Überlegungen bedauerlicherweise nur im Falle $\dim E \geq 5$ zum Ziele.

Die Standuntergruppe $\mathfrak{H} \subset \mathfrak{G}$ eines Punktes oder einer offenen Hyperebene besitzt nach (49) bzw. (46b) folgende Eigenschaften.

(S_1) $(\mathfrak{G}:(\mathfrak{H},\mathfrak{H})) = 2$.

(S_2) $\mathfrak{H}$ besitzt einen in $\mathfrak{H}$ zentralisatorgleichen Normalteiler $\mathfrak{n}$.

Diese beiden Forderungen sollen den Ausgangspunkt für unsere weiteren Überlegungen bilden. Was (S_2) angeht, so muß man zunächst jedenfalls damit rechnen, daß $\mathfrak{H}$ mehrere Normalteiler der genannten Art besitzt. Weiter bleibt zu bemerken, daß die beiden Forderungen (S_1) und (S_2) von sehr unterschiedlichem Gewicht sind. Dies zeigt sich z. B. bei der Klärung der Frage, ob (S_1) und (S_2) voneinander unabhängig sind. Jede Standuntergruppe eines abgeschlossenen Unterraums $U \neq 0,E$ besitzt die Eigenschaft (S_2); (S_1) dagegen ist nur dann erfüllt, wenn U ein Punkt oder eine Hyperebene ist. Sucht man nach Untergruppen vom Doppelnebenklassenindex 2, für die (S_2) verletzt ist, so bieten sich zunächst Normalteiler vom Index 2 an. Derartige Beispiele genügen zwar zur Demonstration, daß (S_2) von (S_1) unabhängig ist, aber es bleibt der Eindruck, daß dies triviale Realisierungen für (S_1) und $\neg(S_2)$ sind. Nichtnormale Untergruppen, die (S_1) aber nicht (S_2) erfüllen, sind wohl ohne größere Anstrengungen nicht herbeizuschaffen. Ich kenne nur zwei wesentlich verschiedene Belege für dieses Vorkommnis. Denken wir an das 4. Beispiel aus §1! Wie schon früher bemerkt, besitzen hier Standuntergruppen dichter Hyperebenen den Doppelnebenklassenindex 2; (S_2) ist natürlich verletzt. Zweitens findet man in der linearen Gruppe eines 4-dimensionalen Vektorraums über GF(2) Untergruppen dieser seltsamen Sorte. (Vgl. das Beispiel B nach (55)!) Nach diesen Überlegungen verfestigt sich der Eindruck, daß von unseren beiden Forderungen (S_1) die dominierende Rolle spielt, während (S_2) für den Ausschluß von Trivialfällen und Sonderlingen sorgt.

Um das Axiom (S_1) nutzbar zu machen, benötigen wir einige kaum erwähnenswerte Kenntnisse über Untergruppen vom Doppelnebenklassenindex 2.

(51) G sei eine beliebige Gruppe und $H \subset G$ eine Untergruppe mit $(G:(H,H)) = 2$.
a) H ist eine maximale Untergruppe von G, und zwar entweder normalisatorgleich oder ein Normalteiler vom Index 2.
b) Für jedes $\alpha \in G - H$ trifft $\{\alpha^\eta \mid \eta \in H\}$ jede Nebenklasse $\neq H$ von H.

Beweis. a) Wegen $G = H \cup H\alpha H$ für jedes $\alpha \in G - H$ ist H maximal. Folglich ist H entweder normalisatorgleich oder ein Nor-

malteiler von G. Im zuletzt genannten Fall ist der Index 2, weil dann nämlich jede Doppelnebenklasse zu einer Nebenklasse zusammenschrumpft. b) Betrachten wir etwa eine Rechtsnebenklasse $H\gamma \neq H$. Wegen $\alpha,\gamma \in G - H$ gilt $\gamma = \eta_1\alpha\eta_2 = \eta_1\eta_2\alpha^{\eta_2}$ mit passenden $\eta_i \in H$. Demnach gehört α^{η_2} zu $H\gamma$.

Die Diskussion der Untergruppen mit den Eigenschaften (S) leiten wir ein mit zwei einfachen Vorüberlegungen.

(52) $\mathfrak{H} \subset \mathfrak{G}$ sei eine Untergruppe mit den Eigenschaften (S) und $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{H}$ ein in $\mathfrak{H}$ zentralisatorgleicher Normalteiler. Dann gilt $\mathfrak{N}(\mathfrak{H}) = \mathfrak{H} = \mathfrak{N}(\mathfrak{h})$. Ferner ist $\mathfrak{h}$ zentralisatorgleich in $\mathfrak{G}$.

Beweis. Zunächst zeigen wir, daß $\mathfrak{h} \subset Z(\mathfrak{G})$ unmöglich ist. Andernfalls wäre nämlich $\mathfrak{H} = \mathfrak{h}$; $\mathfrak{H}$ wäre als Zentrumsuntergruppe normal in $\mathfrak{G}$ und dann auf Grund von (S_1) und (51a) vom Index 2 in $\mathfrak{G}$. Dies führte zu $2 = (\mathfrak{G}:\mathfrak{H}) \geq (\mathfrak{G}:Z(\mathfrak{G}))$. Nach dieser Vorüberlegung zu unseren Behauptungen! Da $\mathfrak{h}$ normal in $\mathfrak{H}$ ist, steckt $\mathfrak{H}$ in $\mathfrak{N}(\mathfrak{h})$. Im Falle $\mathfrak{N}(\mathfrak{h}) \neq \mathfrak{H}$ wäre $\mathfrak{h}$ wegen der Maximalität von $\mathfrak{H}$ ein Normalteiler in $\mathfrak{G}$. Weil $\mathfrak{h}$ abelsch ist, ergäbe sich mit (45c) die bereits als unmöglich erkannte Situation $\mathfrak{h} \subset F(\mathfrak{G}) = Z(\mathfrak{G})$. Aus der nun gesicherten Kenntnis $\mathfrak{N}(\mathfrak{h}) = \mathfrak{H}$ sowie der Zentralisatorgleichheit von $\mathfrak{h}$ in $\mathfrak{H}$ folgt, daß $\mathfrak{h}$ auch zentralisatorgleich in $\mathfrak{G}$ ist. Noch zu zeigen bleibt, daß $\mathfrak{H}$ normalisatorgleich ist. Andernfalls wäre $\mathfrak{H}$ gemäß (51a) ein Normalteiler vom Index 2. Wegen $\mathfrak{N}(\mathfrak{h}) = \mathfrak{H}$ gäbe es genau eine weitere zu $\mathfrak{h}$ konjugierte Untergruppe $\tilde{\mathfrak{h}} \subset \mathfrak{H}$. $\mathfrak{h}\tilde{\mathfrak{h}} = \langle\mathfrak{h},\tilde{\mathfrak{h}}\rangle$ wäre als Produkt abelscher Normalteiler von $\mathfrak{H}$ nilpotent, außerdem natürlich normal in $\mathfrak{G}$. Dies führte zu $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{h}\tilde{\mathfrak{h}} \subset F(\mathfrak{G}) = Z(\mathfrak{G})$, was nach Vorbemerkung unmöglich ist.

Mit dem nächsten Hilfssatz, der für sich genommen ohne Interesse ist, soll die Wiederholung gleichartiger Schlußweisen unterbunden werden. Beim Beweis werden wir die für beliebige Vektorraumendomorphismen α,β gültige Rangformel $rg(\alpha\beta - id) \leq rg(\alpha - id) + rg(\beta - id)$ benutzen.

(53) $\mathfrak{H} \subset \mathfrak{G}$ sei eine Untergruppe mit den Eigenschaften (S) und $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{H}$ ein zentralisatorgleicher Normalteiler.
a) Zu bzgl. $\mathfrak{H}$ nicht konjugierten Automorphismen $\alpha,\beta \in \mathfrak{G} - \{id\}$

gibt es ein $\gamma \in \mathfrak{H} - \{id\}$ mit $rg(\gamma - id) \leq rg(\alpha - id) + rg(\beta - id)$.
b) Zu jedem Automorphismus $\alpha \in \mathfrak{H} - \{id\}$ gibt es ein $\beta \in \mathfrak{h} - \{id\}$ mit $rg(\beta - id) \leq 2\, rg(\alpha - id)$.
c) $\mathfrak{h}$ enthält einen Automorphismus $\alpha \neq id$, der einen offenen Unterraum vektorweise fest läßt. Ist E von endlicher Dimension, so ist überdies $rg(\alpha - id) \leq 4$ durch passende Wahl von α erreichbar.

Beweis. a) Im Falle $\alpha, \beta \notin \mathfrak{H}$ gibt es wegen (S_1) nach (51b) ein bzgl. $\mathfrak{H}$ zu β konjugiertes $\beta' \in \mathfrak{G}$ mit $\alpha \in \mathfrak{H}\beta'$. $\gamma := \alpha\beta'^{-1} \in \mathfrak{H}$ ist dann ein Automorphismus $\neq id$ mit $rg(\gamma - id) = rg(\alpha\beta'^{-1} - id) \leq rg(\alpha - id) + rg(\beta'^{-1} - id) = rg(\alpha - id) + rg(\beta - id)$. b) Gemäß (S_2) gibt es im Falle $\alpha \notin \mathfrak{h}$ ein $\gamma \in \mathfrak{h}$, das mit α nicht vertauschbar ist. $\beta := \alpha\gamma\alpha^{-1}\gamma^{-1} \neq id$ gehört zu $\mathfrak{h}$; wie gewünscht gilt $rg(\beta - id) = rg(\alpha(\gamma\alpha^{-1}\gamma^{-1}) - id) \leq rg(\alpha - id) + rg(\gamma\alpha^{-1}\gamma^{-1} - id) = rg(\alpha - id) + rg(\alpha^{-1} - id) = 2\, rg(\alpha - id)$. c) Zur Begründung der ersten Behauptung brauchen wir wegen b) lediglich einen Automorphismus $\gamma \in \mathfrak{H} - \{id\}$ vorzuweisen, für den $\gamma - id$ von endlichem Rang ist. Dazu wähle man zwei nicht vertauschbare Transvektionen $\tau_1, \tau_2 \in \mathfrak{G}$ und setze in a) $\alpha := \tau_1$, $\beta := \tau_1\tau_2$. Nun zur zweiten Behauptung. Wegen b) genügt es, einen Automorphismus $\gamma \in \mathfrak{H} - \{id\}$ mit $rg(\gamma - id) \leq 2$ ausfindig zu machen. Im Falle $|K| > 2$ können wir uns wieder auf a) berufen: Man wähle für α eine Transvektion $\neq id$ und für β eine Streckung $\neq id$. Der noch verbleibende Fall $|K| = 2$ erfordert eine gesonderte Betrachtung. Nehmen wir an, das Produkt von je zwei verschiedenen Transvektionen aus $\mathfrak{G}$ liegt außerhalb von $\mathfrak{H}$. Mit (51b) folgt dann, daß die Gesamtheit der Transvektionen aus $\mathfrak{G}$ ein Vertretersystem für die Rechtsnebenklassen von $\mathfrak{H}$ in $\mathfrak{G}$ bildet. Daraufhin können wir den Index $(\mathfrak{G}:\mathfrak{H})$ ermitteln. Bezeichnet n die Dimension von E, so gilt $(\mathfrak{G}:\mathfrak{H}) = (2^n - 1)(2^{n-1} - 1) + 1 = 2^{2n-1} - 3 \cdot 2^{n-1} + 2 = 2(2^{2n-2} - 3 \cdot 2^{n-2} + 1)$. Wegen $n \geq 3$ ist $\frac{1}{2}(\mathfrak{G}:\mathfrak{H})$ ungerade. Dem entnehmen wir, daß eine 2-Sylowgruppe von $\mathfrak{H}$ Normalteiler vom Index 2 einer 2-Sylowgruppe von $\mathfrak{G}$ ist. Weil jede 2-Sylowgruppe von $\mathfrak{G}$ eine Vierergruppe aus Transvektionen enthält, finden wir in $\mathfrak{H}$ eine Transvektion $\neq id$. Damit ist unsere Annahme als unzutreffend erkannt und die Existenz eines Automorphismus $\alpha \in \mathfrak{H} - \{id\}$ mit $rg(\alpha - id) \leq 2$ gesichert.

Nach diesen Vorerwägungen wollen wir abklären, welche Zusatz-

informationen beigebracht werden müssen, um eine Untergruppe $\mathfrak{H} \subset \mathfrak{G}$ mit den Eigenschaften (S) als Standuntergruppe eines Punktes bzw. einer offenen Hyperebene auszuweisen.

(54) $\mathfrak{H} \subset \mathfrak{G}$ sei eine Untergruppe mit den Eigenschaften (S) und $\mathfrak{n} \subset \mathfrak{H}$ ein zentralisatorgleicher Normalteiler von $\mathfrak{H}$. Besitzt $\mathfrak{n}$ einen nichttrivialen invarianten Unterraum endlicher Dimension, so ist $\mathfrak{H}$ die Standuntergruppe eines Punktes oder die einer offenen Hyperebene.

Beweis. Mit einem laut Voraussetzung existierenden endlich-dimensionalen minimalen $\mathfrak{n}$-invarianten Unterraum $U \neq 0,E$ bilden wir das System $\mathfrak{S} := \{\alpha(U) \mid \alpha \in \mathfrak{H}\}$, dessen Mitglieder natürlich durchweg minimale $\mathfrak{n}$-invariante Unterräume sind. Das Kernstück unseres Beweises besteht darin, die Annahme $Z := [\mathfrak{S}] = E$ zu Fall zu bringen. Wir beginnen unsere Überlegungen mit dem Nachweis, daß jedes $W \in \mathfrak{S}$ ein offenes $\mathfrak{n}$-invariantes Komplement besitzt. Gemäß (53c) gibt es nämlich einen Automorphismus $\gamma \in \mathfrak{n} - \{id\}$, dessen Fixvektoren einen offenen Unterraum $F \neq E$ bilden. Da $\mathfrak{n}$ abelsch ist, erweist sich F als ein $\mathfrak{n}$-invarianter Unterraum. Wegen der Minimalität der Mitglieder von $\mathfrak{S}$ und der Annahme $Z = E$ gibt es eine endliche nichtleere Familie $W_1, \ldots, W_r \in \mathfrak{S}$ mit $F \oplus W_1 \oplus \ldots \oplus W_r = E$. Also besitzt W_r ein offenes $\mathfrak{n}$-invariantes Komplement. Dasselbe gilt dann für jedes $W \in \mathfrak{S}$. Auf Grund der eben gewonnenen Erkenntnis können wir jetzt zeigen, daß das Unterraumsystem $\mathfrak{S}$ unabhängig und die Summe jedes Teilsystems abgeschlossen ist. Dazu wählen wir zu vorgelegtem $W_o \in \mathfrak{S}$ ein $\mathfrak{n}$-invariantes offenes Komplement V und einen Automorphismus $\alpha \in \mathfrak{n}$, der W_o nicht vektorweise fest läßt. Der durch $\gamma(x) := \begin{cases} \alpha(x) & \text{auf } W_o \\ x & \text{auf } V \end{cases}$ definierte Vektorraumautomorphismus von E ist wegen der Offenheit von V topologisch, also ein Mitglied von $\mathfrak{G}$. Weil γ mit jedem Element von $\mathfrak{n}$ vertauschbar ist, liegt es gemäß (52) in $\mathfrak{n}$. Wir nehmen jetzt an, daß es ein $W \in \mathfrak{S} - \{W_o\}$ gibt mit $W \not\subset V$. Nach Lage der Dinge sind dann W_o, W und $D := (W + W_o) \cap V$ drei paarweise fremde Unterräume gleicher Dimension von $W_o \oplus W$. Durch einen vorgegebenen Punkt $P \subset W_o$ legen wir eine Gerade G, die W und D trifft. γ läßt W_o, W und $G \cap D \subset V$ jeweils fest und dann auch G, weil diese die einzige Treffgerade durch $G \cap D$ für W_o und W ist. Auf der Geraden G finden wir drei verschiedene Fixpunkte von γ, nämlich P, $G \cap D$ und $G \cap W$. Wegen

$\gamma(x) = x$ für $x \in G \cap D$ läßt γ - auch bei fehlender Kommutativität von K - die Gerade G vektorweise fest. Insbesondere gilt $\gamma(p) = p$ für $p \in P$, insgesamt also $\gamma(x) = x$ auf W_o im Widerspruch zur Konstruktion von γ. Damit ist unsere Zwischenannahme als unzutreffend erkannt und die Unabhängigkeit von $\mathfrak{S}$ bewiesen. Die beiden Unterräume $[\mathfrak{S} - \{W_o\}]$ und V stimmen als vergleichbare Komplemente von W_o überein. Dem ist zu entnehmen, daß die Summe jedes Teilsystems von $\mathfrak{S}$ abgeschlossen ist. Um herauszustellen, daß die jetzt vorliegende Situation mit (S_1) kollidiert, betrachten wir $\mathfrak{G}$ als Permutationsgruppe auf $\Gamma := \{\alpha(\mathfrak{S}) \mid \alpha \in \mathfrak{G}\}$. $\mathfrak{H}$ läßt $\mathfrak{S}$ fest und stimmt dann als maximale Untergruppe mit der Standuntergruppe von $\mathfrak{S}$ überein. Wir brauchen nur noch zu zeigen, daß $\mathfrak{H}$ auf $\Gamma - \{\mathfrak{S}\}$ nicht transitiv operiert. Dann nämlich ist der Doppelnebenklassenindex von $\mathfrak{H}$ in $\mathfrak{G}$ größer als 2 und der gewünschte Widerspruch erreicht. Um die noch klaffende Lücke zu schließen, nehmen wir eine Fallunterscheidung vor.

1. Fall: $\mathfrak{S}$ besteht aus Punkten. Wir denken uns zwei verschiedene Punkte $P_1, P_2 \in \mathfrak{S}$ beliebig fixiert. Man findet ohne weiteres Punkte $Q_1, Q_2 \neq P_1, P_2$ derart, daß $\mathfrak{S}_1 := (\mathfrak{S} - \{P_1\}) \cup \{Q_1\}$, $\mathfrak{S}_2 := (\mathfrak{S} - \{P_1, P_2\}) \cup \{Q_1, Q_2\}$ je eine Zerlegung von E bilden; $\mathfrak{S}, \mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2$ sind natürlich paarweise verschieden. Wegen der Offenheit von $[\mathfrak{S} - \{P_1, P_2\}]$ gehören $\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2$ beide zu Γ. Gäbe es ein $\alpha \in \mathfrak{H}$ mit $\alpha(\mathfrak{S}_1) = \mathfrak{S}_2$, so erhielte man die offenkundig widersprüchliche Gleichung $\alpha(\mathfrak{S} - \{P_1\}) = \alpha(\mathfrak{S} \cap \mathfrak{S}_1) = \alpha(\mathfrak{S}) \cap \alpha(\mathfrak{S}_1) = \mathfrak{S} \cap \mathfrak{S}_2 = \mathfrak{S} - \{P_1, P_2\}$.

2. Fall: Die Mitglieder von $\mathfrak{S}$ sind nicht punktförmig. Bei fixiertem $W_o \in \mathfrak{S}$ wählen wir Komplemente $W_1, W_2 \neq W_o$ für $[\mathfrak{S} - \{W_o\}]$ mit $W_1 \cap W_o = O$, $W_2 \cap W_o \neq O$. $\mathfrak{S}_i := (\mathfrak{S} - \{W_o\}) \cup \{W_i\}$ $(i = 1,2)$ sind wiederum verschiedene Zerlegungen $\neq \mathfrak{S}$ von E, die wegen der Offenheit von $[\mathfrak{S} - \{W_o\}]$ zu Γ gehören. Nehmen wir an, es gäbe ein $\alpha \in \mathfrak{H}$ mit $\alpha(\mathfrak{S}_1) = \mathfrak{S}_2$. Wegen $\mathfrak{S} \cap \mathfrak{S}_1 = \mathfrak{S} - \{W_o\} = \mathfrak{S} \cap \mathfrak{S}_2$ ließe dieses W_o fest und führte W_1 in W_2 über, was nach Wahl der W_i unmöglich ist.

Jetzt können wir unsere Behauptung mit wenigen Worten begründen. $\mathfrak{H}$ läßt den nichttrivialen Unterraum Z fest. Wegen der Maximalität von $\mathfrak{H}$ folgt zunächst $\mathfrak{H} = \mathfrak{G}_Z$ und weiter, daß Z abgeschlossen oder dicht ist. Letzteres kommt wegen $F(\mathfrak{G}_Z) \supset \mathfrak{h} \supset\supset Z(\mathfrak{G})$ nicht in Betracht. Außerdem ist wegen der Endlichkeit des Doppelnebenklassenindex - wie im Anschluß an (49) vermerkt - Z von endlicher Dimension oder endlicher Kodimension, daraufhin

diskret oder offen und dann gemäß (49) ein Punkt oder eine offene Hyperebene.

Unser nächster Satz zeigt, daß die Forderungen (S) beinahe ausreichen, um die Standuntergruppen der Punkte bzw. der offenen Hyperebenen zu kennzeichnen.

(55) $\mathfrak{H} \subset \mathfrak{G}$ sei eine Untergruppe mit den Eigenschaften (S).
a) Im Falle $\dim E \geq 5$ ist $\mathfrak{H}$ die Standuntergruppe eines Punktes oder die einer offenen Hyperebene.
b) Besitzt der Körper K endlichen Grad über seinem Zentrum Z, so ist $\mathfrak{H}$ die Standuntergruppe eines Punktes oder die einer offenen Hyperebene, es sei denn, daß $K \cong GF(2)$, $\dim E = 3$, $(\mathfrak{G}:\mathfrak{H}) = 8$ gilt.

Beweis. Wie gewohnt bezeichne $\mathfrak{n} \subset \mathfrak{H}$ einen zentralisatorgleichen Normalteiler von $\mathfrak{H}$. a) Wegen der Dimensionsforderung gibt es nach (53c) einen Automorphismus $\alpha \in \mathfrak{n}$ derart, daß $U := \text{Bild}(\alpha - \text{id})$ ein nichttrivialer Unterraum endlicher Dimension ist. Weil U $\mathfrak{n}$-invariant ist, können wir uns auf (54) berufen. b) Wir nehmen an, daß $\mathfrak{H}$ weder die Standuntergruppe eines Punktes noch die einer offenen Hyperebene ist. Wegen a) gilt dann $n := \dim E \leq 4$; gemäß (54) sind O und E die einzigen $\mathfrak{n}$-invarianten Unterräume. Die vom Schurschen Lemma her geläufige Schlußweise zeigt in Verbindung mit (52), daß $\mathfrak{n}$ zusammen mit dem Nullendomorphismus einen kommutativen Körper $\tilde{\mathfrak{n}} := \mathfrak{n} \cup \{0\}$ bildet. In diesem steckt natürlich $\tilde{Z} := Z(\mathfrak{G}) \cup \{0\}$. Bezeichnet m den Grad von K über Z, so hat der Z-Vektorraum E die Dimension mn. Weil die Mitglieder von $\mathfrak{G}$ natürlich auch Automorphismen des eben genannten Vektorraums sind, ist die Erweiterung $\tilde{\mathfrak{n}}/\tilde{Z}$ algebraisch; mn ist eine obere Schranke für die Grade der Mitglieder von $\tilde{\mathfrak{n}}$. Daraufhin ist $\mathfrak{H}/\mathfrak{n}$ von endlichem Exponenten $e \in \mathbb{N}$, weil sie als Gruppe von Automorphismen der Körpererweiterung $\tilde{\mathfrak{n}}/\tilde{Z}$ angesehen werden kann. Um daraus Kapital zu schlagen, wählen wir eine Transvektion $\tau \in \mathfrak{G} - \{\text{id}\}$ und eine Streckung $\sigma \in \mathfrak{G}$ mit Streckungsfaktor $\lambda \in Z - \{0,1\}$. Wegen (53b) liegen τ, σ beide außerhalb von $\mathfrak{H}$. Gemäß (51b) gibt es eine Transvektion τ' derart, daß $\alpha := \sigma\tau'$ zu $\mathfrak{H}$ gehört. Weil α^e in $\mathfrak{n}$ liegt und Fixvektoren $\neq 0$ besitzt, gilt $\alpha^e = \text{id}$. Betrachten wir α als Automorphismus des Z-Vektorraums E, so steht uns wegen der Kom-

mutativität von Z und der Endlichkeit der Dimension die vertraute Determinantenbildung zur Verfügung. Man sieht ohne weiteres, daß $\det\alpha = \lambda^m$ gilt. Daraus folgt dann $1 = \det id = \det\alpha^e = \lambda^{me}$. Dies zeigt, daß die Multiplikationsgruppe von Z von endlichem Exponenten ist. Folglich ist Z und dann auch K endlich, der Satz von Wedderburn liefert $K = Z$. Die Situation hat sich in erfreulicher Weise vereinfacht! q bezeichne die Elementanzahl von K. $\mathfrak{N}$ ist als Multiplikationsgruppe des endlichen Körpers $\tilde{\mathfrak{N}}$ zyklisch. Der Grad bzgl. $\tilde{Z}$ eines Erzeugenden von $\mathfrak{N}$ stimmt mit n überein. Wäre er nämlich kleiner als n, so besäße $\mathfrak{N}$ einen nichttrivialen invarianten Unterraum; andererseits kann er n nicht übersteigen. Daraufhin ist $\tilde{\mathfrak{N}} \cong GF(q^n)$. Die Ordnung der Gruppe $\mathfrak{H}/\mathfrak{N}$ teilt n, weil sie als Untergruppe der Galoisgruppe von $\tilde{\mathfrak{N}}/\tilde{Z}$ angesehen werden kann. Nunmehr ist gesichert, daß

(*) $\quad q^n - 1 \mid |\mathfrak{H}| \mid n(q^n - 1)$

gilt. Mit (S_1) gewinnen wir die Abschätzung $n(q^n-1) + (n(q^n-1))^2 \geq |\mathfrak{H}| + |\mathfrak{H}|^2 \geq |\mathfrak{G}| = q^{\binom{n}{2}} \prod_{i=1}^{n} (q^i - 1)$. Nach Division mit $q^n(q^n-1)$ folgt wegen $n \leq 4$ die Ungleichung $16 > n^2 - \frac{n^2 - n}{q^n} \geq q^{\binom{n}{2}-n} \prod_{i=1}^{n-1} (q^i - 1) \geq \prod_{i=1}^{n-1} (q^i - 1)$. $q \geq 3$ ist wegen $16 > (q-1)(q^2-1) \geq 2 \cdot 8 = 16$ unmöglich. $q = 2$ und $n = 4$ würde $16 > (2^2-1)\cdot(2^3-1) = 21$ liefern. Die einzige noch verbleibende Möglichkeit ist $q = 2$, $n = 3$. In diesem Falle ist $\mathfrak{H}$ wegen (*) von der Ordnung 7 oder 21. Ersteres scheidet wegen $7 + 7^2 < 168 = |\mathfrak{G}|$ aus. Also gilt $|\mathfrak{H}| = 21$ und damit $(\mathfrak{G}:\mathfrak{H}) = 8$.

Das eben gewonnene Resultat ist unausgegoren, weil ich nicht weiß, ob (55b) gültig bleibt, wenn man die Voraussetzung über den Koordinatenkörper streicht. Mit meinen Überlegungen bin ich wohl deshalb steckengeblieben, weil es mir nicht gelungen ist, die Forderung (S_1) wirkungsvoll ins Spiel zu bringen.

In diesem Zusammenhang möchte ich auf ein weiteres Problem hinweisen, zu dem ich allerdings nichts Wesentliches zu sagen habe. Man kann fragen, ob es Untergruppen vom Doppelnebenklassenindex 2 gibt, die weder Transvektionen noch Streckungen enthalten. Trotz einiger Anstrengung habe ich lediglich zwei derartige Beispiele gefunden. Beide scheinen ihre Existenz dem Vorhandensein von Isomorphismen zwischen gewissen klassischen Grup-

pen zu verdanken. Übrigens zeigt das erste der beiden Beispiele, daß der in (55b) erwähnte Ausnahmefall tatsächlich auftritt.

Beispiel A. $K := GF(2)$, $\dim E = 3$, $\mathfrak{H} \subset \mathfrak{G}$ eine Untergruppe vom Index 8.

Wegen $GL_3(2) \cong PSL_2(7)$ besitzt $\mathfrak{G}$ eine Untergruppe $\mathfrak{H}$ vom Index 8 und Doppelnebenklassenindex 2. Weil $|\mathfrak{H}| = \frac{1}{8}|\mathfrak{G}| = \frac{1}{8}168 = 21$ ungerade ist, findet man in $\mathfrak{H}$ keine Transvektionen $\neq$ id. Nun bestätigen wir, daß $\mathfrak{H}$ auch die Eigenschaft (S_2) besitzt. Eine 7-Sylowgruppe von $\mathfrak{H}$ ist ein zyklischer Normalteiler. Weil man in $\mathfrak{H}$ Automorphismen der Ordnung 3 vorfindet und diese fixpunktbehaftet sind, ist der genannte Normalteiler zentralisatorgleich in $\mathfrak{H}$. Demgemäß erfüllt $\mathfrak{H}$ zwar die Forderungen (S), ist aber natürlich weder die Standuntergruppe eines Punktes noch die einer Geraden.

Beispiel B. $K := GF(2)$, $\dim E = 4$, $\mathfrak{H} \subset \mathfrak{G}$ eine Untergruppe vom Index 8.

Wegen $GL_4(2) \cong \mathfrak{A}_8$ besitzt $\mathfrak{G}$ Untergruppen vom Index 8. $\mathfrak{H}$ sei eine solche. Weil $\mathfrak{H}$ normalisatorgleich ist, operiert $\mathfrak{G}$ auf den Konjugierten von $\mathfrak{H}$ wie $\mathfrak{A}_8$. Folglich ist $(\mathfrak{G}:(\mathfrak{H},\mathfrak{H})) = 2$. Um zu klären, daß $\mathfrak{H}$ keine Transvektionen $\neq$ id enthält, sehen wir nach, welche der beiden Konjugiertenklassen von Involutionen von $\mathfrak{A}_8$ der Klasse der Transvektionen $\neq$ id entspricht. Die Konjugiertenklasse von $(1\,2)(3\,4)(5\,6)(7\,8)$ besteht aus $\frac{1}{4!}\cdot\binom{8}{2}\binom{6}{2}\binom{4}{2} = \frac{1}{6\cdot 4}\,28\cdot 15\cdot 6 = 105$ Elementen, die von $(1\,2)(3\,4)$ aus $\frac{1}{2!}\binom{8}{2}\binom{6}{2} = 14\cdot 15 = 210$. In $\mathfrak{G}$ findet man $(2^4-1)(2^3-1) = 15\cdot 7 = 105$ Transvektionen $\neq$ id. Nun ist ersichtlich, daß $\mathfrak{H}$ keine Transvektionen $\neq$ id enthält.

Um die für den Beweis des Gruppensatzes erforderliche gruppentheoretische Kennzeichnung der Standuntergruppen von Punkten bzw. offenen Hyperebenen zu gewinnen, ziehen wir ein "Notaxiom" in Betracht.

(S*) Jede Konjugiertenklasse von Involutionen von $\mathfrak{G}$ ist in $\mathfrak{H}$ vertreten.

Angesichts der Brutalität von (S*) ist der nun folgende Kenn-

zeichnungssatz für sich genommen ohne Interesse.

(56) Eine Untergruppe $\mathfrak{H} \subset \mathfrak{G}$ ist genau dann die Standuntergruppe eines Punktes oder die einer offenen Hyperebene, wenn sie die Eigenschaften (S_1), (S_2) und (S^*) besitzt.

Beweis. Wie schon früher festgestellt, besitzen die in Rede stehenden Standuntergruppen die Eigenschaften (S_1) und (S_2). Auch (S^*) ist erfüllt, weil jede Involution aus $\mathfrak{G}$ einen Fixpunkt und eine offene Fixhyperebene besitzt. Umgekehrt sei jetzt $\mathfrak{H} \subset \mathfrak{G}$ eine Untergruppe mit (S_1), (S_2), (S^*) und $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{H}$ ein zentralisatorgleicher Normalteiler. Wegen (S^*) finden wir in $\mathfrak{H}$ eine Involution $\iota \neq \mathrm{id}$, die eine offene Hyperebene vektorweise fest läßt. Nach (53b) gibt es dann ein $\alpha \in \mathfrak{h} - \{\mathrm{id}\}$ mit $\mathrm{rg}(\alpha - \mathrm{id}) \leq 2$. Also besitzt $\mathfrak{h}$ einen nichttrivialen invarianten Unterraum endlicher Dimension, mit (54) folgt unsere Behauptung.

Wir wenden uns jetzt dem Gruppensatz zu. Er gibt Auskunft über das Zustandekommen von Isomorphismen zwischen Automorphismengruppen linearer Systeme. Ehe wir diesen Satz formulieren und beweisen, wollen wir uns nach solchen Isomorphismen umsehen. Dabei haben wir Gelegenheit, noch einige Bezeichnungen einzuführen; dies läßt sich wohl kaum vermeiden, wenn man eine knappe und zugleich präzise Formulierung des Gruppensatzes angeben will.

E_1, E_2 seien lineare Systeme und $\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2$ ihre Automorphismengruppen. Wir beginnen mit einer sehr banalen Feststellung: Jeder Isomorphismus zwischen linearen Systemen stiftet einen Isomorphismus zwischen ihren Automorphismengruppen. Ist nämlich $\Phi : E_1 \to E_2$ eine topologische semilineare Transformation, so liefert $\sigma_\Phi(\alpha) := \Phi \circ \alpha \circ \Phi^{-1}$ als Einschränkung des von Φ induzierten Ringisomorphismus $\mathfrak{R}(E_1) \to \mathfrak{R}(E_2)$ einen Gruppenisomorphismus $\sigma_\Phi : \mathfrak{G}_1 \to \mathfrak{G}_2$. Weiterhin bemerken wir, daß Φ durch σ_Φ weitgehend bestimmt ist. σ_Φ bleibt jedenfalls ungeändert, wenn man der Transformation Φ eine Homothetie $\neq 0$ von E_1 bzw. E_2 vor- bzw. nachschaltet. Damit ist die Unbestimmtheit von Φ in ihrer Gänze beschrieben. Sind nämlich Φ, Φ' Transformationen der genannten Art mit $\sigma_\Phi = \sigma_{\Phi'}$, so folgt für jeden Punkt $P \in \mathfrak{P}(E_1)$ zunächst $\mathfrak{G}_{2\Phi(P)} = \sigma_\Phi(\mathfrak{G}_{1P}) = \sigma_{\Phi'}(\mathfrak{G}_{1P}) = \mathfrak{G}_{2\Phi'(P)}$ und daraus

$\Phi(P) = \Phi'(P)$. Demnach unterscheiden sich Φ und Φ' höchstens um eine Homothetie. Bezeichnet Σ_1 die Menge der Isomorphismen σ_Φ, so kann man auf Grund des eben Überlegten festhalten, daß Σ_1 in kanonischer Weise in Bijektion steht mit der Gesamtheit der Kollineationen $\mathfrak{P}(E_1) \to \mathfrak{P}(E_2)$, die $\mathfrak{L}(E_1)$ auf $\mathfrak{L}(E_2)$ abbilden. Suchen wir nach weiteren Isomorphismen! Weil ein lineares System und sein konjugiertes isomorphe Automorphismengruppen besitzen, finden wir sofort einen zweiten Typus von Isomorphismen. Jede topologische semilineare Transformation $\Psi : E_1^o \to E_2$ liefert vermöge $\sigma_\Psi(\alpha) := \Psi \circ (\alpha^o)^{-1} \circ \Psi^{-1}$ einen Isomorphismus $\sigma_\Psi : \mathfrak{G}_1 \to \mathfrak{G}_2$. Wie oben ist Ψ durch σ_Ψ bis auf Homothetien eindeutig bestimmt. Die Menge dieser neuen Isomorphismen σ_Ψ bezeichnen wir mit Σ_2. Σ_1 und Σ_2 sind fremd; um dies einzusehen braucht man nur an die Bilder der Standuntergruppen von Punkten zu denken. Wir fügen die beiden Teile Σ_1 und Σ_2 zusammen und setzen

$$\Sigma(\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2) := \Sigma_1 \cup \Sigma_2 .$$

Im Falle $\mathfrak{G}_1 = \mathfrak{G}_2 =: \mathfrak{G}$ benutzen wir die kürzere Schreibweise $\Sigma(\mathfrak{G})$. In dem eben genannten Spezialfall ist nicht nur Σ_1 eine Gruppe, sondern sogar $\Sigma(\mathfrak{G})$; überdies ist Σ_1 ein Normalteiler vom Index ≤ 2. Dies läßt sich unter Benutzung des Ringsatzes mühelos begründen. Jedes $\sigma_\Phi \in \Sigma_1$ ist Ausschnitt eines Ringautomorphismus von $\mathfrak{R}(E)$. Für $\sigma_\Psi \in \Sigma_2$ kann die Abbildung $\alpha \in \mathfrak{G} \to \sigma_\Psi(\alpha)^{-1} \in \mathfrak{G}$ zu einem Ringantiautomorphismus von $\mathfrak{R}(E)$ ergänzt werden. Mit dem Ringsatz folgt dann $\Sigma_2 \Sigma_2 \subset \Sigma_1$, $\Sigma_2^{-1} \subset \Sigma_2$, $\Sigma_1 \Sigma_2 \cup \Sigma_2 \Sigma_1 \subset \Sigma_2$ und daraus die Gültigkeit unserer Behauptung.

Allgemein zu reden muß man damit rechnen, daß $\Sigma(\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2)$ nicht das volle System der Isomorphismen von $\mathfrak{G}_1$ auf $\mathfrak{G}_2$ ist. Wir wollen uns das an einem simplen Beispiel verdeutlichen. $K := GF(q)$ sei ein endlicher Körper mit $q > 2$. Als Vektorraumdimension sehen wir eine natürliche Zahl $n \geq 3$ vor derart, daß $n+1$ teilerfremd ist zu $q-1$. Die an n gestellten Forderungen sind natürlich ohne weiteres erfüllbar. E sei ein n-dimensionaler K-Vektorraum, den wir in gewohnter Weise als lineares System deuten. Die Zuordnungsvorschrift $\tau(\alpha) := (\det \alpha)\,\alpha$ liefert jedenfalls einen Endomorphismus $\tau : \mathfrak{G} \to \mathfrak{G}$. Als Kernelemente von τ kommen nur Homothetien in Betracht. Für $\lambda \in K^\times$ folgt aus $\mathrm{id} = \tau(\lambda\,\mathrm{id}) = \det(\lambda\,\mathrm{id})\,\lambda\,\mathrm{id} = \lambda^{n+1}\mathrm{id}$ zunächst $\lambda^{n+1} = 1$

und dann $\lambda = 1$ auf Grund der Wahl von n. Demnach ist τ injektiv, wegen der Endlichkeit von $\mathfrak{G}$ dann ein Automorphismus. Die Voraussetzung $q > 2$ sorgt für $\tau \neq id$. Zu überlegen bleibt $\tau \notin \Sigma(\mathfrak{G})$. Weil τ die Standuntergruppe eines jeden Punktes fest läßt, könnte τ allenfalls zu Σ_1 gehören. Wegen $\tau \neq id$ ist dies unmöglich. Damit haben wir einen neuen Typus von Automorphismen entdeckt. Geben wir diesen zunächst einen Namen!

Definition. Ein Automorphismus $\tau : \mathfrak{G} \to \mathfrak{G}$ mit $\tau(\mathfrak{G}_P) = \mathfrak{G}_P$ für jeden Punkt $P \in \mathfrak{P}(E)$ heißt Ausnahmeautomorphismus von $\mathfrak{G}$.

Die Ausnahmeautomorphismen von $\mathfrak{G}$ bilden natürlich eine Untergruppe $A(\mathfrak{G})$ der Automorphismengruppe $\mathrm{Aut}\,\mathfrak{G}$. Diese hat mit $\Sigma(\mathfrak{G})$ nur die Identität gemeinsam; zur Begründung verweisen wir auf die einschlägige Überlegung im eben behandelten Beispiel. Der folgende übrigens wohlbekannte Hilfssatz deutet an, wie man sich den Mechanismus eines Ausnahmeautomorphismus vorstellen muß.

(57) Für einen Ausnahmeautomorphismus $\tau \in A(\mathfrak{G})$ liefert $\chi(\alpha) := \tau(\alpha) \circ \alpha^{-1}$ einen Homomorphismus $\chi : \mathfrak{G} \to Z(\mathfrak{G})$.

Beweis. Für jeden Punkt $P \in \mathfrak{P}(E)$ gilt $\mathfrak{G}_{\tau(\alpha)(P)} = \tau(\alpha)\,\mathfrak{G}_P\,\tau(\alpha)^{-1}$ $= \tau(\alpha)\tau(\mathfrak{G}_P)\tau(\alpha)^{-1} = \tau(\alpha\,\mathfrak{G}_P\,\alpha^{-1}) = \tau(\mathfrak{G}_{\alpha(P)}) = \mathfrak{G}_{\alpha(P)}$ und deshalb $\tau(\alpha)(P) = \alpha(P)$. Folglich ist $\chi(\alpha) = \tau(\alpha) \circ \alpha^{-1}$ eine lineare Homothetie und dann eine zentrale. Die Homomorphieeigenschaft von χ ist jetzt leicht zu sehen: $\chi(\alpha \circ \beta) = \tau(\alpha \circ \beta) \circ (\alpha \circ \beta)^{-1} =$ $\tau(\alpha) \circ ((\tau(\beta) \circ \beta^{-1}) \circ \alpha^{-1}) = (\tau(\alpha) \circ \alpha^{-1}) \circ (\tau(\beta) \circ \beta^{-1}) = \chi(\alpha) \circ$ $\chi(\beta)$.

Wir wollen anmerken, daß ein Ausnahmeautomorphismus von $\mathfrak{G}$ angesichts von (57) die Kommutatorgruppe von $\mathfrak{G}$ elementweise fest läßt. Ferner ist an Hand von (57) leicht zu sehen, daß $A(\mathfrak{G})$ ein Normalteiler von $\mathrm{Aut}\,\mathfrak{G}$ ist. Um dies zu begründen, kann man z. B. folgendermaßen argumentieren. Jeder Automorphismus $\rho \in \mathrm{Aut}\,\mathfrak{G}$ induziert einen Automorphismus $\tilde{\rho}$ von $\mathfrak{G}/Z(\mathfrak{G})$. Wegen (57) ist $A(\mathfrak{G})$ der Kern des Homomorphismus $\rho \to \tilde{\rho}$.

Nach diesen Vorüberlegungen erscheint der Inhalt des nun folgenden Gruppensatzes sehr plausibel.

(58) Gruppensatz. E_1, E_2 seien lineare Systeme mit Automorphismengruppen $\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2$. Im Falle $\dim E_i \geq 3$ besitzt jeder Isomor-

phismus $\rho : \mathfrak{G}_1 \to \mathfrak{G}_2$ eine Darstellung der Gestalt $\rho = \tau \circ \sigma$ mit $\tau \in A(\mathfrak{G}_2)$, $\sigma \in \Sigma(\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2)$. Dabei sind τ und σ durch ρ eindeutig bestimmt.

Beweis. Wir nehmen uns zuerst die Unitätsfrage vor. Sind $\tau' \circ \sigma' = \rho = \tau'' \circ \sigma''$ zwei Darstellungen der genannten Art, so ist jedenfalls $\sigma' \circ \sigma''^{-1} = \tau'^{-1} \circ \tau'' \in A(\mathfrak{G}_2)$. Außerdem gilt $\sigma' \circ \sigma''^{-1} \in \Sigma(\mathfrak{G}_2)$; zur Begründung kann man z. B. bemerken, daß σ', σ'' entweder beide zu Σ_1 oder beide zu Σ_2 gehören. Mit der bereits gesicherten Kenntnis $\Sigma(\mathfrak{G}_2) \cap A(\mathfrak{G}_2) = \{id\}$ folgt jetzt $\tau' = \tau''$, $\sigma' = \sigma''$. Für den Beweis der Existenzbehauptung sei ein Isomorphismus $\rho : \mathfrak{G}_1 \to \mathfrak{G}_2$ vorgelegt. Gemäß (56) ist das ρ-Bild der Standuntergruppe eines Punktes die Standuntergruppe eines Punktes oder die einer offenen Hyperebene. Dies nötigt uns zu einer Fallunterscheidung.

1. Fall: Für einen passenden Punkt $P \in \mathfrak{P}(E_1)$ ist $\rho(\mathfrak{G}_{1P})$ die Standuntergruppe eines Punktes. Weil die Standuntergruppen der Punkte von E_1 eine Konjugiertenklasse von $\mathfrak{G}_1$ bilden, folgt zunächst $\rho(\{\mathfrak{G}_{1P} \mid P \in \mathfrak{P}(E_1) \text{ Punkt}\}) \subset \{\mathfrak{G}_{2Q} \mid Q \in \mathfrak{P}(E_2) \text{ Punkt}\}$ und dann aus Symmetriegründen Gleichheit. Demnach bildet ρ die Standuntergruppen der Punkte von E_1 bijektiv auf die der Punkte von E_2 ab. Die damit verbundene Bijektion der Menge der Punkte von E_1 auf die der Punkte von E_2 bezeichnen wir mit $\bar{\rho}$. Natürlich gilt $\overline{\rho^{-1}} = \bar{\rho}^{-1}$. Als nächstes überlegen wir, daß für jede Untergruppe $\mathfrak{H} \subset \mathfrak{G}_1$ die Gleichheit

$$(*) \qquad \bar{\rho}(\mathfrak{p}_1(\mathfrak{H})) = \mathfrak{p}_2(\rho(\mathfrak{H}))$$

besteht. Für einen Punkt $P \in \mathfrak{p}_1(\mathfrak{H})$ gilt definitionsgemäß $F(\mathfrak{G}_{1P}) \subset \mathfrak{H}$; daraus folgt $F(\mathfrak{G}_{2\bar{\rho}(P)}) = \rho(F(\mathfrak{G}_{1P})) \subset \rho(\mathfrak{H})$, also $\bar{\rho}(P) \in \mathfrak{p}_2(\rho(\mathfrak{H}))$. Die noch fehlende Inklusion gilt aus Symmetriegründen. (48a) zeigt in Verbindung mit der eben begründeten Aussage (*), daß ρ Standuntergruppen von Unterräumen von E_1 in solche von Unterräumen von E_2 überführt. Wiederum aus Symmetriegründen erhalten wir $\rho(\{\mathfrak{G}_{1U} \mid U \in \mathfrak{P}(E_1) - \{0\}\}) = \{\mathfrak{G}_{2W} \mid W \in \mathfrak{P}(E_2) - \{0\}\}$. Daraufhin kann $\bar{\rho}$ zu einer Bijektion $\bar{\rho} : \mathfrak{P}(E_1) - \{0\} \to \mathfrak{P}(E_2) - \{0\}$ erweitert werden und zwar so, daß $\rho(\mathfrak{G}_{1U}) = \mathfrak{G}_{2\bar{\rho}(U)}$ gilt für jedes $U \in \mathfrak{P}(E_1) - \{0\}$. Die Beziehung $\overline{\rho^{-1}} = \bar{\rho}^{-1}$ bleibt natürlich bestehen. (48b) zusammen mit (*) zeigt, daß $\bar{\rho}$ Inklusionen erhält. Weil dies auch für $\overline{\rho^{-1}} = \bar{\rho}^{-1}$ gilt, ist $\bar{\rho} : \mathfrak{P}(E_1) - \{0\} \to \mathfrak{P}(E_2) - \{0\}$ ein Ordnungsisomorphismus. Wegen (48c) ist die Abge-

schlossenheit eines Unterraums $\neq 0$ invariant gegenüber $\bar{\rho}$, $\overline{\rho^{-1}} = \bar{\rho}^{-1}$. Daraufhin bildet $\bar{\rho}$ das System $\mathfrak{L}(E_1) - \{0\}$ auf $\mathfrak{L}(E_2) - \{0\}$ ab. Durch die Zusatzdefinition $\bar{\rho}(0) := 0$ gewinnen wir eine Kollineation $\bar{\rho} : \mathfrak{P}(E_1) \to \mathfrak{P}(E_2)$ mit $\bar{\rho}(\mathfrak{L}(E_1)) = \mathfrak{L}(E_2)$. Nach dem Fundamentalsatz der projektiven Geometrie kann $\bar{\rho}$ durch eine semilineare Transformation $\Phi : E_1 \to E_2$ induziert werden; diese ist topologisch, weil sie $\mathfrak{L}(E_1)$ auf $\mathfrak{L}(E_2)$ abbildet. Der von Φ induzierte Isomorphismus $\sigma := \sigma_\Phi$ gehört natürlich zu $\Sigma(\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2)$. Weil $\sigma(\mathfrak{G}_{1P}) = \mathfrak{G}_{2\Phi(P)} = \mathfrak{G}_{2\bar{\rho}(P)} = \rho(\mathfrak{G}_{1P})$ für jeden Punkt $P \in \mathfrak{P}(E_1)$ gilt, erweist sich $\rho \circ \sigma^{-1}$ als Ausnahmeautomorphismus von $\mathfrak{G}_2$.

2. Fall: Für einen passenden Punkt $P \in \mathfrak{P}(E_1)$ ist $\rho(\mathfrak{G}_{1P})$ die Standuntergruppe einer offenen Hyperebene. Hier sind keine neuen Überlegungen erforderlich. Wir schalten dem Isomorphismus ρ die Umkehrabbildung von $\alpha \in \mathfrak{G}_1 \to (\alpha^o)^{-1} \in \mathfrak{G}_1^o$ vor, berufen uns auf den bereits bewiesenen Fall und kehren anschließend zu ρ zurück.

Nun haben wir den Gruppensatz in voller Allgemeinheit in Händen, das Hauptziel der vorliegenden Arbeit ist damit erreicht. Freilich könnte man die Überlegungen noch fortführen, zumal der Gruppensatz - im Gegensatz zum Ringsatz - das Problem der Bestimmung aller Isomorphismen zwischen Automorphismengruppen linearer Systeme nicht vollständig klärt, sondern nur eine - wenn auch weitgehende - Reduktion leistet. Zu ermitteln bleiben die Ausnahmeautomorphismen. Diese entziehen sich naturgemäß unseren von geometrischen Vorstellungen getragenen Überlegungen. In diesem Lichte erscheint der Gruppensatz als ein natürlicher Abschluß unserer Betrachtungen.

Um wenigstens eine Anwendung des Gruppensatzes zu geben, wollen wir ein dem Leser sicherlich geläufiges Resultat herleiten.

(59) Für die lineare Gruppe eines Vektorraums E unendlicher Dimension gilt $\mathrm{Aut}\, GL(E) \cong P\Gamma L(E)$.

Beweis. Wir ergänzen E zu einem linearen System, indem wir den Dualraum E^* als Raum der stetigen Linearformen vorsehen. Die Automorphismengruppe $\mathfrak{G}$ des linearen Systems E stimmt dann mit $GL(E)$ überein. Weil E von unendlicher Dimension ist, gilt $\dim E^o = \dim E^* > \dim E$. Dem entnehmen wir $\Sigma(\mathfrak{G}) = \Sigma_1$. Wie im Anschluß an (35) festgestellt, stimmt die lineare Gruppe $GL(E)$ mit ihrer

Kommutatorgruppe überein. Daraufhin ist wegen (57) $A(\mathfrak{G}) = \{id\}$. Mit dem Gruppensatz folgt jetzt $\mathrm{Aut}\,\mathfrak{G} = \Sigma_1$ und damit die Behauptung.

Die letzte Bemerkung gilt einem Sachverhalt, für den ich in der Literatur keine Belegstelle finden konnte. Den mir geläufigen Beispielen von Ausnahmeautomorphismen $\neq id$ liegen durchweg Vektorräume endlicher Dimension zugrunde. Ich will zeigen, daß nichttriviale Ausnahmeautomorphismen auch bei linearen Systemen unendlicher Dimension auftreten können. Dazu denken wir an unser 4. Beispiel; E sei ein lineares System dieser Art mit $|K| > 2$. Zur Herstellung des gewünschten Ausnahmeautomorphismus fassen wir zunächst die Untergruppe $\mathfrak{G}_0 \subset \mathfrak{G}$ ins Auge, die aus den Automorphismen besteht, welche einen offenen Unterraum vektorweise fest lassen. $\mathfrak{G}_0$ ist natürlich ein Normalteiler von $\mathfrak{G}$, man hat die direkte Zerlegung $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}_0 \times Z(\mathfrak{G})$. $\pi : \mathfrak{G} \to \mathfrak{G}_0$ sei die Projektion auf $\mathfrak{G}_0$ mit $Z(\mathfrak{G})$ als Kern. Für Mitglieder von $\mathfrak{G}_0$ kann man eine Determinantenbildung einführen. Bei vorgelegtem $\alpha \in \mathfrak{G}_0$ sei U ein offener Unterraum von $\mathrm{Kern}(\alpha - id)$. α induziert einen Automorphismus $\bar{\alpha}$ des endlich-dimensionalen Faktorraums E/U. Offenbar ist $\det \bar{\alpha}$ unabhängig von der Wahl von U. Daraufhin liefert $D(\alpha) := \det \bar{\alpha}$ eine Abbildung $D : \mathfrak{G}_0 \to K^\times$, die sich als Homomorphismus erweist. Nun können wir einen Ausnahmeautomorphismus von $\mathfrak{G}$ vorzeigen. $\tau(\alpha) := D(\pi(\alpha))\,\alpha$ ist offenbar ein Endomorphismus $\tau : \mathfrak{G} \to \mathfrak{G}$. τ ist injektiv, weil als Kernelemente nur Homothetien in Betracht kommen und diese bei τ fest bleiben. τ ist auch surjektiv, denn es gilt $\tau\left(\frac{1}{D(\pi(\alpha))}\,\alpha\right) = \alpha$. Insgesamt ist demnach τ ein Ausnahmeautomorphismus von $\mathfrak{G}$. Die Voraussetzung $|K| > 2$ gewährleistet $\tau \neq id$.

LITERATURVERZEICHNIS

[B] Baer — Linear algebra and geometry. New York 1952.

[B_1] Bourbaki — General Topology. Paris 1966.

[B_2] Bourbaki — Espaces vectoriels topologiques. Paris 1955.

[D] Day — Normed linear spaces. 3. Auflage. Berlin 1973.

[G] Gross, Ogg — Quadratic spaces with few isometries. Comm. Math. Helv. 48 (1973), 511-519.

[J] Jacobson — Lectures in abstract algebra II. New York 1953.

[K] Köthe — Topologische Lineare Räume I. 2. Auflage. Berlin 1966.

[M_1] Mackey — Isomorphisms of normed linear spaces. Ann. Math. 43 (1942), 244-260.

[M_2] Mackey — On infinite-dimensional linear spaces. Amer. Math. Soc. 57 (1945), 155-207.

[O] Ornstein — Dual vector spaces. Ann. Math. 69 (1959), 520-534.

[R] Rosenberg — The structure of the infinite general linear groups. Ann. Math. 68 (1958), 278-294.

[W] Wolfson — An ideal-theoretic characterization of the ring of all linear transformations. Amer. J. Math. 75 (1953), 358-386.